



TITLE:

地盤中基礎構造物の地震応答に関する研究( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

秋吉, 卓

---

CITATION:

秋吉, 卓. 地盤中基礎構造物の地震応答に関する研究. 京都大学, 1973, 工学博士

ISSUE DATE:

1973-01-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r2211>

RIGHT:

地盤中基礎構造物の地震応答  
に関する研究

昭和47年 9 月

秋 吉 卓

# 地盤中基礎構造物の地震応答 に関する研究

昭和47年 9 月

秋 吉 卓

# 目 次

第 1 章	緒 論	1
第 2 章	均質地盤中にある基礎構造物の周波数応答	7
2.1	概 説	7
2.2	表層地盤内における波動伝播	8
2.2.1	均質粘弾性地盤の運動方程式	8
2.2.2	構造物表面から放射される波動	12
2.2.3	地中構造物に作用する地震力	16
2.3	地中構造物の動揺振動	24
2.3.1	動揺振動の運動方程式	24
2.3.2	構造物の周波数応答倍率	25
2.4	数値計算結果とその考察	28
2.4.1	表層地盤内の圧力分布	28
2.4.2	表層地盤のばね剛性および地震力の動的効果	33
2.4.3	基礎構造物の周波数応答倍率	42
2.5	結 言	48
第 3 章	均質地盤中にある剛基礎構造物の不規則地震応答	50
3.1	概 説	50
3.2	動揺振動の単位衝撃応答関数	51
3.3	確率過程入力を受ける構造物の不規則地震応答	62
3.3.1	応答確率量	62
3.3.2	確率量による応答の評価	63
3.4	定常確率過程入力に対する構造物の過渡応答	66
3.4.1	定常ホワイトノイズ入力に対する応答変位の共分散	66
3.4.2	過渡応答に関する数値計算結果とその考察	70
3.5	非定常確率過程入力に対する構造物の非定常応答	78
3.5.1	単一卓越周波数を持つ非定常確率過程入力に対する 応答確率量	78
3.5.2	非定常応答に関する数値計算結果とその考察	83



3.6	結 言 .....	9 6
第 4 章	不均質地盤中にある基礎構造物の周波数応答 .....	9 8
4.1	概 説 .....	9 8
4.2	表層地盤内における波動伝播 .....	9 9
4.2.1	不均質粘弾性地盤の運動方程式 .....	9 9
4.2.2	構造物表面から放射される波動 .....	1 0 2
4.2.3	地中構造物に作用する地震力 .....	1 0 5
4.3	剛構造物の動揺振動 .....	1 0 7
4.3.1	動揺振動の運動方程式 .....	1 0 7
4.3.2	剛構造物の周波数応答倍率 .....	1 0 8
4.4	構造物の曲げ振動 .....	1 1 2
4.4.1	曲げ振動の運動方程式 .....	1 1 2
4.4.2	構造物の固有値・固有モード .....	1 1 5
4.4.3	構造物の周波数応答倍率 .....	1 1 7
4.5	数値計算結果とその考察 .....	1 2 0
4.5.1	表層地盤変位と地震力 .....	1 2 2
4.5.2	地中構造物の動揺振動特性 .....	1 2 8
4.5.3	地中構造物の曲げ振動特性 .....	1 3 4
4.6	結 言 .....	1 5 0
第 5 章	多層地盤の振動と基礎構造物の周波数応答 .....	1 5 2
5.1	概 説 .....	1 5 2
5.2	多層地盤内における波動伝播 .....	1 5 3
5.2.1	水平せん断振動の固有モードとその直交性 .....	1 5 3
5.2.2	地盤変位とパワースペクトル .....	1 6 0
5.2.3	放射波の固有モードとその直交性 .....	1 6 2
5.3	地中基礎構造物の周波数応答 .....	1 7 3
5.3.1	剛構造物の動揺振動 .....	1 7 3
5.3.2	構造物の曲げ振動 .....	1 7 6
5.4	数値計算結果とその考察 .....	1 7 9
5.4.1	多層地盤の振動特性 .....	1 8 0
5.4.2	剛構造物の動揺振動 .....	1 9 1

5.5 結 言 .....	198
参 考 文 献 .....	201
結 論 .....	205
付 録 .....	
A. 地表面上剛構造物の動揺振動 .....	209
A.1 概 説 .....	209
A.2 動揺振動の方向性とアドミッタンス .....	210
A.2.1 点加振による半無限弾性体の応答 .....	210
A.2.2 地盤の動揺振動アドミッタンス .....	220
A.2.3 任意方向強制力を受ける構造物の動揺振動 .....	230
A.2.4 数値計算結果とその考察 .....	231
A.3 模型剛構造物の動揺振動実験 .....	242
A.3.1 実地盤上の振動実験と結果の考察 .....	242
A.3.2 模型地盤上の振動実験と結果の考察 .....	247
A.4 結 言 .....	258
B. Mathieu function に関する characteristic number $a_1, b_1$ および	
展開係数 $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$ について .....	260
参 考 文 献 .....	267

## 第 1 章 緒 論

この地球上で起る地震の大半はいわゆる環太平洋地震帯で発生しているが、その地震帯に属する日本列島はほとんどいたるところが被害を受けてきたことが有史以来の古書によっても明らかである<sup>1)</sup>。地震動そのものには今昔の差異はなくても、古代の人間はこの自然の猛威と直接的に対立していたであろうが、一方現在のように産業・社会等の急激な膨張が人間の活動空間を拡げ、特に建築物が大型化しその利用が高効率化・集約化するにしたがって、大地震時には直接的な被害のみならず、これら建築物が第2次的な被害を人間にもたらす役目を果しており、測り知れないほどの人的・物的被害を及ぼすようになってきている。その代表的な事例は大正12年(1923年)の関東大震災であり、その時点において、耐震工学なる学問分野が急速に発生し、社会と大きなかかわりあいを持つようになってきたと言っても過言ではあるまい。一方アメリカでは1932年以降、USCGS(U.S. Coast & Geodetic Survey)による強震観測が実施されて、地震工学、耐震工学が順次発達してきたようである<sup>2)</sup>。かくして1956年にはCaliforniaのBerkeleyで最初の世界地震工学会議(WCEE)がもたれ、以後ⅡWCEE(1960)は東京、京都、ⅢWCEE(1965)はニュージーランドのAucklandとWellington、ⅣWCEE(1969)はチリのSantiagoで開催され、さらにⅤWCEEは1973年イタリアのRomeで開催されようとしていることは衆知のとおりである。

このように耐震工学に関する研究は現在まで活発に進められてはきたが、この大地に土木・建築などの構造物を築造する際に十分な耐震性を与える統一的な設計思想がいまだ確立されるには至っていないと言わなければなるまい。その中で大震災前後より現在まで多用されてきているのが、いわゆる震度法<sup>3)</sup>と呼ばれる設計法であるが、これは動的な地震力を静的なそれに転換して問題を取り扱う便法である。この方法は対象構造物が割合剛な場合は、地動と構造物の加速度に大差はないので、結果的には大過ないが、一方たわみやすい構造物に関してはそのたわみ形状が種々ありうるので慣性力の分布を定めがたく不適當である。そこでこの欠点を補うために、鉛直方向に水平震度分布を変化させた一種の修正的な震度法なども考えられてきたが、いずれにしても構造物を支持する地盤の変形は考慮せずに、地震力の絶対最大値を静的問題に置き換えることには変わりはない。現在のところこれに代わる合理的にして実用的な設計法がいまだ確立されるに至っていないことと、この考え方は理解しやすくかつ計算も比較的容易であるので、実設計の段階では広く慣用されているようである。

しかるに実際の地震による被害とこの震度法との相関を疑わせるような状況も報告されたり

して、国内、国外の研究者の間でも次第にこの現象について注目を引くようになってきた。従来の考え方では、構造物周辺の地盤の運動は抑制されることなく構造物へそのまま入力として作用するとされていたために、ほとんどの場合は過大な入力について応答を計算していたことになり、それ相応の安全側の設計になっていたのであろうが、それよりもかなり安全性の劣ると思われた構造物ですら無被害であったりして、ここにおいて地盤と構造物の相互作用の問題が大きく取上げられるようになってきた。このことは取りも直さず耐震工学上で従来の加速度中心主義から、速度および変位へと関心が移っていることに対応している。特に1964年の新潟地震においては、地盤の変形を抜きにしては考えられないような被害が続出したことはいまだ記憶に新しいところである。このように地盤と構造物の相互作用が注目され出した頃は、時あたかも電子計算機の高速化と大型化のすう勢と合致して、構造物をとりまく地盤を質量、ばね、およびダッシュポットとの組み合わせによる網状体にモデル化した系の応答解析<sup>4)</sup>が大流行となって現在まで続いていると言えよう。このようなモデル化においては、もはや計算の実行そのものはほとんど問題ではなくなっており、いかに地盤をうまく抽象できるかにかかっているといえよう。そのため個々の要素には連続体としての性質を残しながら、全体を分割要素の集合体として取扱う、いわゆる有限要素法が持込まれるまでに至っている。このような、地盤を非連続体として取り扱う方法は、一面では電子計算機で処理しやすいモデル化という要請から生まれたものではあるが、モデルの抽象化さえ適当であれば、地盤の非線形的性質、不均質性、不連続性等の特徴を取り込めるので、広範な問題に対処できるのは何と言っても大きな特長である。しかしながら、この分割要素による方法は、対象とする系の境界面が閉じた、いわゆる有限領域の問題においては厳密解にいくらかでも接近することが可能ではあるが、地盤のように無限媒体の場合には、どこに境界を設けて等置モデルを考えるかによって応答にかなりの差が生じ、かつこの境界のため媒体中を伝播する波動が境界で反射をくり返す結果、複雑な振動モードが生じ、地盤に対する適用においては現在のところ何らかの対策、理論の発展が持たれている状態といえよう。

このような半無限媒体としての地中に埋設された基礎構造物の地震応答解析ないしは耐震性に関して、その構造物を支持する基盤と表層地盤について、微小弾性論を適用して3次元的な解析を行なうという方法が数年前より始められてきている<sup>5)</sup>。ところで構造物の周辺をとりまく媒質が水である場合については、これより以前に解析および実験<sup>6), 7)</sup>が行なわれてはいるが、これらの半無限領域における解析において共通している点は、地動を受ける構造物の表面で放射あるいは反射された波動が無限遠方に逸散して行き、そのためにこの系には減衰効果が生じることである。しかしながら周辺媒質が水と土においては、前者では縦波しか伝播し得ないのに反し、後者では縦波と横波が共存しうることの差異があり、水は構造物に対して質量効果と



してのみ作用するのに反して、土は質量効果のみならずばねの効果をも及ぼすことは決定的に異なる点であり、したがって前者は構造物の共振振動数を低下させる効果を持つのに反して、後者はむしろその逆の効果を発揮するようになる。このように、基礎構造物を支持する地盤を完全連続体として、その応答特性に関する解析はある程度までは進められているが、その実験による検証となると、地盤は理想的な半無限弾性体そのものでないこと、土圧反力・減衰力などの計測が容易でないこと、理論と実際との対応が簡単ではなかろうことなどもあって、これらに関する有益な資料が見当らず、今後このような資料の蓄積が待たれる。

ところで上述のことは、ほとんど例外なく周波数応答に関する議論であったが、実際の地震動のような不規則に変動する入力を受けるときの構造物の応答およびその評価という問題に関しては、不規則に変動する地震動および応答量を確率過程として捕える方法論がほぼ定着してきており<sup>8)</sup>、またその応答量の評価法については、簡単な1自由度モデルを用いて理論展開が行われてきている。<sup>9), 10), 11), 12)</sup>ところが、この理論展開における前提として、任意時刻の応答量が入力に対して一義的に定まっているということで、必ず系の単位衝撃応答関数が存在することになっていた。しかしながら、基礎構造物のような系において、その単位衝撃応答関数を求めるために適当な変換によって周波数の複雑な関数になっている応答量<sup>13)</sup>を時間領域にもどさねばならず、ここには相当の困難さが横たわっており、いままでに顕著な成果は得られていないようである。

以上のようにたどってきた道程は主として、線形解析についてであったが、言うまでもなく、われわれを取り巻くあらゆる振動系は厳密にはすべて非線形系と考えねばならず、特に土木・建築構造物のように地盤と密着した振動系では、その地震時挙動の非線形性を無視することはできないであろう。しかしながら、非線形とは言っても、そのほとんどの場合は復元力あるいは減衰力と呼ばれるものが非可逆的な履歴を伴うことが多く、したがってその一般論的な理論展開は容易ではなく、多くの場合は履歴に伴うエネルギー損失を減衰力に振替えて等価的に解析を進めているのが現状である。ところで、この場合の復元力、減衰力等は、地盤は非線形的特性を持つ機械ばねとして特色づけられることが多く、その意味では例え復元力が塑性状態にあっても、常にその作用する方向は加振力と逆向きであり、地盤が構造物の振動を励起する役割は存在しないことになる。したがって、復元力としての非線形ばねは単一モードしかとり得ないことが特徴であろう。しかるに、地震時には、構造物とその周辺地盤はともに振動するから復元力は周辺地盤との干渉の結果と考えるべきであり、地盤に周波数選択特性などの振動特性があることが確かめられていることから考えると、当然復元力は周辺地盤よりの地震力の周波数特性に依存することになり、したがって地震動の周波数特性と地盤の周波数特性があ

る特別な関係になれば、構造物の応答を増幅する作用もありうることになる。このように地盤の非線形的取り扱いにおいても、いまだに多くの問題点を含んでいるが、線形振動解析において地盤に過大な振動時耐荷力が仮想されている場合があることを考えると、両解析法は相補な役割を果たしている面もあることがいえよう。

以上のようなことが現在までの耐震工学上における、基礎構造物と周辺地盤の動的取り扱いに関する概要であり著者の見解でもあるが、以下このような研究分野においていささかなりともたずさわってきた著者が、本論文においては地中構造物の動特性およびその耐震性について整理したものであって、付録においては構造物下端の地盤の回転ばね剛性および応答の方向性を調べるために地表面上にある構造物の動揺振動について理論および実験を通して検討したものである。それらの内容について略述すると以下ようになる。

まず第2章は、支持地盤として堅い基盤上に比較的軟い等方均質な半無限弾性地盤が載っていて、その表層中に剛な楕円断面を持った基礎構造物がその底面を基盤に支持されているときの、動揺振動の周波数特性について検討したものである。この楕円断面の採用によって、構造物に作用する土圧、表層地盤の構造物に及ぼすばねの動的効果および地震力の動的効果等が、断面形状、構造物の振動の方向によって著しく異なる結果を生ずることを、周波数の変動に対して示している。さらに表層地盤の粘性減衰、縦波・横波の伝播速度比、表層と基盤との静的反力比等のいわゆる表層地盤の物理的条件の差が応答に与える影響をも合わせ検討している。

第3章は、前章の基礎構造物が不規則に変動する地震動を受けるときの、応答確率量を導きその検討を行なったものである。まず前章で得られた結果より、表層のばね効果を振動数の2次曲線で、土圧効果を1自由度共振曲線で近似的に置き換えることにより、地盤と基礎構造物よりなる系の単位衝撃応答関数を導き出す。これは表層地盤と基礎構造物の両共振の影響を受けて、通常の1自由度系の場合の単位衝撃応答関数に比べると、ひずんだ形の時間関数になる。この関数を用いて定常人力に対する基礎構造物の過渡応答および非定常人力に対する非定常応答に関して、基礎的な確率量を解析的に導き出し、これの時間領域上での検討とともに、この応答確率量があるレベルを超過する平均回数についても、基礎構造物の幾何学形状の差異によって相当異なる挙動があることについても言及する。

第4章は、支持地盤系として、堅い基盤の上に不均質な表層地盤が載っている場合を対象にしたもので、剛あるいは柔な円形断面を持った基礎構造物が、基盤面まで根入れされているときの、表層地盤および基礎構造物の動的挙動を解明したものである。表層地盤の不均質性は、地盤のせん断弾性係数が深さの1乗あるいは2乗に比例して連続的に変化する場合を取り扱って

いる。剛な構造物にあっては、均質地盤の場合と比べた振動圧分布、ばね効果および地震力の動的効果の低下や応答倍率に与える影響等について検討する。一方細長い柔な構造物にあっては、種々の形式の構造物の応答倍率や曲げモーメントに地盤の不均質性が及ぼす影響を考究するとともに、そのたわみを固有関数によって展開する際に、展開係数は最初の数項を考慮すれば十分であり、実用的には、その展開係数における地盤と構造物の連成項を無視しても差し支えなく、その結果はあたかもモーダルアナリシスによる解析結果と同等な評価がなされることを示す。

ところで前章までは基盤上に単層地盤のみしか存在しない場合であったが、各層内においてはそれぞれ均質であるような地盤が基盤上に層を成して堆積しているような支持地盤系を対象にしたのが第5章である。さらに基盤面まで根入れされている基礎構造物は前章と同様、剛あるいは柔な円形断面構造物である。前章までのように単層地盤の場合は構造物への入射波および放射波のいずれの場合も、上下方向に伝播するせん断波のもつ固有関数で展開されていたのに反し、多層地盤の場合では振動数によって波動の各層間の透過・反射に特殊な関係が生じ、そのときに存在する直交モードは当然振動数に依存したものとなるが、これを用いて放射波が展開されることを示す。かくして地盤のパワースペクトルも容易に導かれ、以後の構造物の周波数応答特性に関しては、多層地盤を3層としたとき種々の地盤構成が地中構造物に及ぼす影響について数値計算を行ない、その検討を行なう。

以上が地中に埋設された基礎構造物を種々の角度から解析的に検討してきたものであり、本論文の主文の概要でもある。なお付録Aについては、著者が第2章から第5章までの一連の研究の中で、特に剛構造物においては、その底面反力が応答特性に重大な影響を持つことを認識しつつも、境界条件等の制約からその直接的解析は困難であるので、これを振動数に無関係な単なるばね係数および粘性減衰係数で代表させていたが、この底面反力の動特性を別個に調べるために並行して研究したものである。したがって、本文の取組み方と同様に、剛構造物の回転に伴って放射された波動が無限遠に逸散することから生ずる逸散減衰効果が生じ、接触面の動的ばね剛性が当然振動数に依存した複素数で表示されることになる。ここではまず半無限弾性体上の剛構造物の振動性状について論述している。ところで本文中の解析におけるように、地中にある基礎構造物が接触している基盤面上に対して厳密にはこの半無限理論をそのまま持込むことは許されないが、われわれがいう工学的基盤とは表層地盤と比べて相当硬いと考えても差し支えないであろうことから、比較的根入れの浅い剛な基礎構造物の底面反力として、この半無限弾性体理論による解を使用しても、それほど大きな不都合は生じないであろうと考えられる。とはいえその結合の方法には慎重を期さねばならないことは当然であり、今後の理論

的・実験的裏付を得るまでなおしばらくの時間を要するであろう。このような理由で、ここでは第5章までの研究とは一応独立したものとして付録に掲げた次第である。この研究での主な対象は、地表面上にある円形以外の断面形を持った剛構造物が強制回転力を与えられたとき、最大の応答は必ずしも強制力の方向に生ずるのではなく、断面のより偏平な方向に起るのではないかということを、強制力の方向、強制振動数、接触面形状等から、理論および実験を通して検討を加えている。

最後に以上の基礎構造物の形式と地盤構成との兼ね合いにより、応答がいかに支配されるかということを整理するとともに、基礎構造物の耐震設計上の留意点や今後に残された問題点についても言及して結論する。



## 第 2 章 均質地盤中にある基礎構造物の 周波数応答

### 2.1 概 説

近年築造物は大型化の一途をたどっており、特にその一部または全部を地中に埋設する基礎構造物の地震時の安定性が強く要求されており、これまで数多くの理論的・実験的研究が積重ねられてきた。このような基礎構造物は一般に常時は自重および上載荷重を支えるために、その側方地盤よりもはるかに大きい耐荷力のある硬い支持層（以後これを基盤と呼ぶ）まで根入れ打設されるものである。このような表層、基盤および構造物よりなる系の応答特性についての2次元解析はこれまで多く行なわれてきたが、3次元解析例はあまり多くなく、これに先鞭をつけたのは田治見<sup>1)</sup>である。もちろん、2次元解析によっても、半無限地盤と構造物の挙動の定性的傾向はある程度は知りうるが、構造物の振動時にその表面より放射あるいは散乱された波動は地盤内を四方八方に逸散するので、この逸散に関して重要な要素となる構造物の形状が、2次元解析では完全には捕捉できないのである。すなわち、鉛直面内での運動しか考慮しない2次元解析では、構造物奥行方向への波動放射が無視され、一方水平面内での運動しか考慮しないときは、表層地盤のモードの影響が無視される結果になる<sup>2)</sup>。ここに構造物と支持地盤とを立体的な空間で捕えねばならず、したがって3次元解析をなさねばならない根拠があるものと思われる。先述の田治見<sup>3)</sup>は等方均質な地盤中に、剛あるいは柔な円形断面基礎が埋設されている場合を解析しているが、その中で表層地盤によるばね作用や地震力の周波数依存性や、表層の物理定数の変化による応答の吟味など広範囲のパラメトリックな解析を試みている。

しかしながら、実際の基礎構造物は円形断面だけに限らず種々の断面のものが打設されており、上記の円柱に対する解から他の断面の構造物の応答を適切に類推するわけにはいかない。というのは、表層地盤は構造物に対して、直応力とせん断応力でもって抵抗するので、扁平な断面なるがゆえに、地盤応力が小さいということにはならないからである。このようなことを勘案し、著者らも現在まで若干の研究<sup>4), 5), 6)</sup>を行なってきたが、本章においては剛な楕円断面の基礎構造物の動揺振動に関する応答特性について検討してみた。なお基盤の、構造物の動揺振動に対する抵抗の仕方は、緒論においても述べたように、本来は表層地盤に対して行なったと同様に、構造物底面より放射される波動の地下逸散を考慮したものでなくてはならないが、これの厳密な解析は境界条件等の点からきわめて困難であり、ここでは基盤特性を振動数に無

関係な、ばね係数と粘性減衰係数でもって表わして解析を進めた。

## 2.2 表層地盤内における波動伝播

解析を進めるに先立って、地盤および剛基礎構造物に関して、つぎのような仮定を設ける。

- (1) 基礎構造物は動揺振動のみをするものとし、その回転軸は構造物の底面の中心を通り、外力の方向と直交する直線とする。
- (2) 表層地盤は等方均質な半無限弾性体であって、鉛直面内のせん断振動に対してのみ粘性抵抗が働く。
- (3) 表層地盤内の波動の基盤への透過は考えない。
- (4) 構造物と接触している基盤面の特性は、回転ばね係数と粘性減衰係数でもって代表させる。
- (5) 表層地盤内における上下方向の変位は考慮しない。
- (6) 外力は鉛直下方より来襲する。

### 2.2.1 均質粘弾性地盤の運動方程式

上記のように堅固な基盤上の表層地盤は基盤より外力を受けると、表層内の各点は同位相で一樣にせん断振動していると考えることができる。このとき図2.1のように、表層地盤の水平変位を  $u_G$  とすると、地盤内任位点  $(x, y, z)$  における運動方程式は次式のように書き表わすことができる。

$$\rho \frac{\partial^2 u_G}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_B}{\partial t^2} \quad \cdots \cdots (2.1)$$

$$\text{ここに, } \tau_{xz} = \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_G}{\partial z} \quad \cdots \cdots (2.2)$$

そこで、基盤入力  $u_B$  を

$$u_B = A_0 e^{i\omega t} \quad \cdots \cdots (2.3)$$

という定常強制振動であるとし、これに対する表層地盤の定常解  $u_G$  を

$$u_G = U e^{i\omega t} \quad \cdots \cdots (2.4)$$

とすると、式(2.1)に式(2.2)～(2.4)を入れて、

$$\left(1 + 2i h_g \frac{\omega}{\omega_g}\right) \frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{\omega^2}{V_T^2} U = -A_0 \frac{\omega^2}{V_T^2} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

ここに、 $\rho$ ：表層地盤の密度、 $\mu$ ：せん断弾性係数、 $\mu'$ ：せん断振動に対する粘性減衰係数、 $h_g$ ：減衰定数、 $\omega_g$ ：表層地盤のせん断1次固有円振動数、 $\mu'/\mu = 2h_g/\omega_g$

ところで、この表層地盤の $m$ 次の固有値 $\alpha'_m$ と固有関数 $Z_m(z)$ は式(2.5)に相当する非減衰自由振動の式

$$\frac{d^2 Z_m}{dz^2} + \frac{\alpha_m'^2}{V_T^2} Z_m = 0 \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

を、地表面( $z=H$ )で応力0、基盤面で変位0なる境界条件で解けば容易に

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m' &= \frac{(2m-1)\pi}{2H}, \quad (m=1,2,3,\dots) \\ Z_m(z) &= C_0 \sin \alpha_m' z, \quad (C_0: \text{定数}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

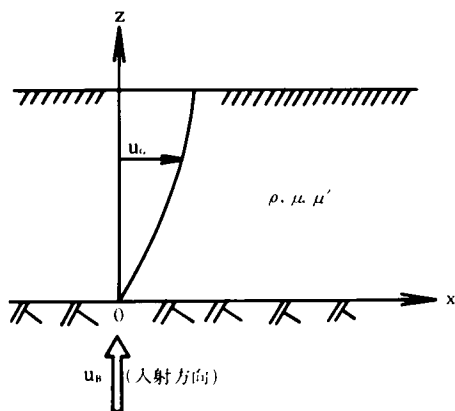


図 2.1 基盤と表層地盤のモデル

を得ることができる。したがって、この固有関数 $Z_m(z)$ を用いて、式(2.5)の $U$ を展開すると結局次式をうる。

$$u_G = U e^{i\omega t} = A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_m' H \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 Z_m(z) \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\text{ただし、} \xi_m^2 = \left(1 + 2i h_g \frac{\omega}{\omega_g}\right) (2m-1)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2$$

ここで、後述の解析の都合で図2.2のような楕円柱座標 $(\xi, \eta, z)$ に直し、 $\xi, \eta$ 方向の変位をおのおの $u_G^\xi, u_G^\eta$ とすると、地盤変位 $u_G$ が長軸方向( $x$ 軸方向)のときは、

$$\left. \begin{aligned} u_G^\xi &= u_G \cos \theta = A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha'_m H \xi_m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 Z_m(z) \cdot \frac{k \sinh \xi \cos \eta}{\ell} \\ u_G^\eta &= -u_G \sin \theta = -A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha'_m H \xi_m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 Z_m(z) \cdot \frac{k \cosh \xi \sin \eta}{\ell} \end{aligned} \right\} \dots (2.9)$$

同様に、 $u_G$  が短軸方向 ( $y$  軸方向) のときは、

$$\left. \begin{aligned} u_G^\xi &= u_G \sin \theta = A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha'_m H \xi_m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 Z_m(z) \cdot \frac{k \cosh \xi \sin \eta}{\ell} \\ u_G^\eta &= u_G \cos \theta = A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha'_m H \xi_m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 Z_m(z) \cdot \frac{k \sinh \xi \cos \eta}{\ell} \end{aligned} \right\} \dots (2.10)$$

ただし、直交座標 ( $x, y, z$ ) と楕円柱座標 ( $\xi, \eta, z$ ) とは

$$\left. \begin{aligned} x &= k \cosh \xi \cos \eta \\ y &= k \sinh \xi \sin \eta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots (2.11)$$

という関係で結ばれているので、楕円面の法線と  $x$  軸の正の向きとのなす角  $\theta$  と  $\xi, \eta$  との関係は

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\partial x}{\ell \partial \xi} = \frac{\partial y}{\ell \partial \eta} = \frac{k \sinh \xi \cos \eta}{\ell}, \quad \sin \theta = \frac{\partial y}{\ell \partial \xi} = -\frac{\partial x}{\ell \partial \eta} = \frac{k \cosh \xi \sin \eta}{\ell} \\ k &= \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (a > b), \quad \ell = k \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \end{aligned} \right\} \dots (2.12)$$

で与えられる。さらに楕円柱表面を表わす座標  $\xi_0$  と、断面の長半径・短半径  $a, b$  とは

$$a = k \cosh \xi_0, \quad b = k \sinh \xi_0, \quad \xi_0 = \tanh^{-1} \left( \frac{a}{b} \right) = \ln \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \dots (2.13)$$

で結ばれており、 $2k$  は 2 焦点間の距離である。



- 11 -

## 2.2.2 構造物表面から放射される波動

図 2.4 のような剛な楕円柱が基盤よりの地震動を直接に受けると同時に、2.2.1 のような表層地盤の応答の影響を受けて運動を開始すると考える。すなわち、構造物の断面の主軸方向に平行に同位相で来襲した波動が、構造物の側面でその一部を四方八方に散乱され、残りは構造物の運動に費される。この散乱波あるいは放射波は表層地盤内を反射を繰返しながら、水平無限遠方に伝播していく。

この散乱・放射波に関する運動方程式は楕円柱座標で書き表わすと、以下のようなになる。短軸方向の振動に関して

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\ell \partial \xi} - 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\ell \partial \eta} + 2(\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial (\ell \tilde{\omega}_\eta)}{\ell \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\ell \partial \eta} + 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\ell \partial \xi} - 2(\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial (\ell \tilde{\omega}_\xi)}{\ell \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.14)$$

が成り立つ。ただし、 $\lambda, \mu$ : Lamé' の定数である。

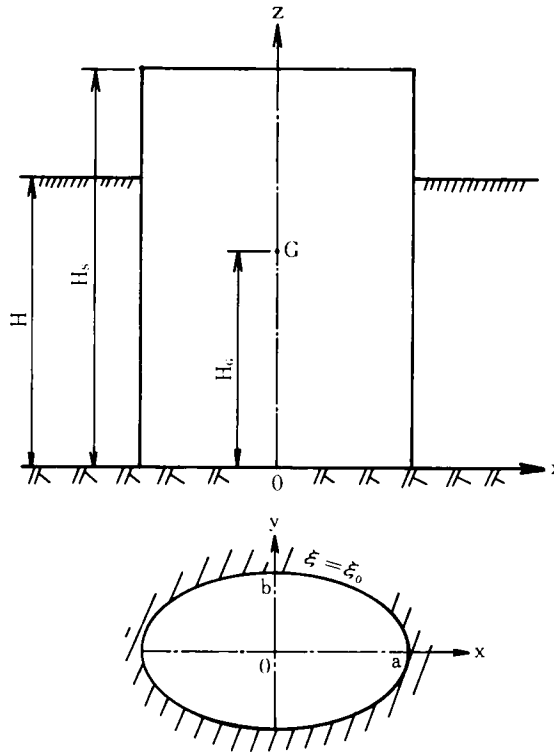


図 2.4 地盤と楕円断面基礎構造物のモデル

さらに, dilatation  $\Delta$  および rotation  $\tilde{\omega}_\xi, \tilde{\omega}_\eta, \tilde{\omega}_z$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial(\ell u_\xi)}{\ell^2 \partial \xi} + \frac{\partial(\ell u_\eta)}{\ell^2 \partial \eta}, & 2\tilde{\omega}_\xi &= -\frac{\partial u_\tau}{\partial z} \\ 2\tilde{\omega}_\eta &= \frac{\partial u_\xi}{\partial z}, & 2\tilde{\omega}_z &= \frac{\partial(\ell u_\eta)}{\ell^2 \partial \xi} - \frac{\partial(\ell u_\xi)}{\ell^2 \partial \eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.15)$$

ところで, 式(2.14)の連立微分方程式を解くのに, 図2.2および図2.4より, 短軸方向の振動の場合の境界条件は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \eta &= 0, \pi \text{ (長軸上)} : u_\xi = 0 \text{ (動径方向変位0)} \\ \text{(ii)} \quad \eta &= \pi/2 \text{ (短軸上)} : u_\eta = 0 \text{ (接線方向変位0)} \\ \text{(iii)} \quad \xi &= \xi_0 \text{ (構造物側面)} : \text{表層地盤と構造物側面との変位の連続条件} \\ \text{(iv)} \quad \xi &= \infty \text{ (無限遠方)} : \sigma_\xi = \sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0 \text{ (全応力0)} \\ \text{(v)} \quad z &= 0 \text{ (基盤面)} : u_\xi = u_\eta = 0 \\ \text{(vi)} \quad z &= H \text{ (地表面)} : \tau_{\xi z} = \tau_{\eta z} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.16)$$

同様に, 長軸方向の振動の場合は

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \eta &= 0, \pi : u_\eta = 0 \\ \text{(ii)} \quad \eta &= \pi/2 : u_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.17)$$

iii)~vi) : (2.16)のiii)~vi)と同じ

そこで, 式(2.14)の変位  $u_\xi, u_\eta$  に関する運動方程式を, dilatation  $\Delta$  と rotation  $\tilde{\omega}_z$  に関する微分方程式に直すと以下のような式になる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta + \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \\ \mu \nabla^2 \tilde{\omega}_z + \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.18)$$

$$\text{ここに, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\ell^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\ell^2 \partial \eta^2}$$

式(2.18)の両式を解けば dilatation および rotation が得られ, さらにそれより変位を求めればよいのであるが, ここでは potential 関数を用いて, 直接変位を求める方法をつぎのよ

うに考える。すなわち、式 (2.18) が  $\xi, \eta, z$  および  $t$  に関して変数分離された解を持つことは明らかであり、かつまた  $z$  方向には有限領域の問題でもあるから、これを 2.2.1 で求めた表層地盤の固有関数  $Z_m(z)$  を用いて展開することができる。したがって、境界条件式 (2.16) の (A) を満たすような解の 1 つは、変位の potential  $\phi_0(\xi, \eta)$ ,  $\phi_0(\xi, \eta)$  を用いて次式のように書き表わせる。

$$\left. \begin{aligned} u_\xi &= \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_0}{\partial \eta} \right) \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \\ u_\eta &= \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \right) \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (2.19)$$

このとき、dilatation および rotation はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \nabla^2 \phi_0 \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \\ \tilde{\omega}_z &= \nabla^2 \phi_0 \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (2.20)$$

となるので、これらを式 (2.18) に持込むと、 $m$  次モードに関してつぎの 2 式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_0 - \alpha_m^2 \phi_0 &= 0 \\ \nabla^2 \phi_0 - \beta_m^2 \phi_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (2.21)$$

$$\text{ここに, } \alpha_m = \frac{\pi}{2H} \frac{V_T}{V_L} \xi_m, \quad \beta_m = \frac{\pi}{2H} \xi_m, \quad \xi_m = \sqrt{\left(1 + 2i h_g \frac{\omega}{\omega_g}\right) (2m-1)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}$$

$$V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} : \text{縦波速度, } V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} : \text{横波速度}$$

そこで、式 (2.21) の第 1 式の変位 potential  $\phi(\xi, \eta)$  が分離定数を  $\lambda'$  として、

$$\phi_0(\xi, \eta) = R(\xi) \Theta(\eta) \quad \cdots \cdots \cdots (2.22)$$

と変数分離されたとすると、

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} - \frac{\alpha_m^2 k^2}{2} \cosh 2\xi = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} - \frac{\alpha_m^2 k^2}{2} \cos 2\eta \equiv \lambda' \quad \cdots \cdots \cdots (2.23)$$

となり、結局つぎの 2 式をうる。



$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\xi^2} - \left( \lambda' + \frac{\alpha_m^2 k^2}{2} \cosh 2\xi \right) R &= 0 \\ \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + \left( \lambda' + \frac{\alpha_m^2 k^2}{2} \cos 2\eta \right) \Theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

これら両式は明らかに、それぞれ modified Mathieu function および Mathieu function を解に持つ<sup>7)</sup>。それゆえ、短軸方向の振動における境界条件式(2.16)の(i),(ii)および(IV)を満たす解は一般に

$$\left. \begin{aligned} R &= \text{Gek}_{2n+1}(\xi, q_1) \\ \Theta &= \text{se}_{2n+1}(\eta, q_1) \end{aligned} \right\}, \quad \lambda' = b_n(q_1) \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

が妥当であり、

$$\phi_0(\xi, \eta) = \text{Gek}_{2n+1}(\xi, q_1) \text{se}_{2n+1}(\eta, q_1), \quad \lambda' = b_n(q_1) \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

となる。同様にして、 $\phi_0(\xi, \eta)$ についても、

$$\phi_0(\xi, \eta) = \text{Fek}_{2n+1}(\xi, q_2) \text{ce}_{2n+1}(\eta, q_2), \quad \lambda' = a_n(q_2) \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

となる。ただし、

$$q_1 = \frac{\alpha_m^2 k^2}{4} = \frac{k^2}{4} \left( \frac{\pi}{2H} \right)^2 \left( \frac{V_T}{V_L} \right)^2 \xi_m^2, \quad q_2 = \frac{\beta_m^2 k^2}{4} = \frac{k^2}{4} \left( \frac{\pi}{2H} \right)^2 \xi_m^2$$

であって、argument(引数) $q_1, q_2$ の場合に対応する $\lambda' = b_n$ および $\lambda' = a_n$ は characteristic number と呼ばれるもので、それらの特性と求め方は付録Bに掲げたとおりである。

したがって、構造物表面で散乱あるいは放射される波動の変位式は、積分定数を $C_{mn}, D_{mn}$ として一般に次式で与えられる。

$$u_\xi = \frac{1}{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ C_{mn} \frac{\partial \text{Gek}_{2n+1}(\xi, q_1)}{\partial \xi} \text{se}_{2n+1}(\eta, q_1) - D_{mn} \text{Fek}_{2n+1}(\xi, q_2) \frac{\partial \text{ce}_{2n+1}(\eta, q_2)}{\partial \eta} \right] \cdot \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

$$u_\eta = \frac{1}{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ C_{mn} \text{Gek}_{2n+1}(\xi, q_1) \frac{\partial \text{se}_{2n+1}(\eta, q_1)}{\partial \eta} + D_{mn} \frac{\partial \text{Fek}_{2n+1}(\xi, q_2)}{\partial \xi} \text{ce}_{2n+1}(\eta, q_2) \right]$$

$$\cdot \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

以上のようにして、短軸方向の振動時における。構造物表面で散乱あるいは放射される波動の変位の一般解が得られたが、同様にして長軸方向の振動の場合も求められ、以下のようになる。

$$u_\xi = \frac{1}{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ C'_{mn} \frac{\partial \text{Fek}_{2n+1}(\xi, q_1)}{\partial \xi} \cdot \text{ce}_{2n+1}(\eta, q_1) - D'_{mn} \text{Gek}_{2n+1} \frac{\partial \text{se}_{2n+1}(\eta, q_2)}{\partial \eta} \right] \cdot \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.30)$$

$$u_\eta = \frac{1}{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ C'_{mn} \cdot \text{Fek}_{2n+1}(\xi, q_1) \frac{\partial \text{ce}_{2n+1}(\eta, q_1)}{\partial \eta} + D'_{mn} \frac{\partial \text{Gek}_{2n+1}(\xi, q_2)}{\partial \xi} \text{se}_{2n+1}(\eta, q_2) \right] \cdot \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

これらの解が、境界条件式(2.16)あるいは(2.17)の(iii)以外の条件をすべて満たしており、また modified Mathieu function  $\text{Fek}_{2n+1}(\xi, q)$  あるいは  $\text{Gek}_{2n+1}(\xi, q)$  の argument  $q$  の絶対値の増大に対して指数的に減少する関数であるため、この複素 argument  $q$  の増大とともに波動は無限遠方に向けて伝播して行きながら、その振幅は急速に減少し、遂には消滅する現象を表わすことはいうまでもない。

### 2.2.3 地中構造物に作用する地震力

このように地中に埋設された構造物への外力の入射の形式は単純であっても、構造物表面から表層地盤への散乱・放射による波動は、構造物の運動量の大きさやその境界面の形状にしたがって、水平方向無限遠へ逸散する割合が異なり、それだけに現象は複雑である。したがって、このようないわゆる相互作用を考慮した地盤の変位の一般解は当然のことながら、2.2.1で得た表層地盤自身の応答変位に2.2.2で得た構造物表面より散乱・放射される変位波動を加えたものになる。

ところで、これら一般解には積分定数を含んでいるので、境界条件式(2.16)あるいは同(2.17)における(iii)の構造物と表層地盤との変位の連続条件式を用いて決定せねばならない。しかるにこのとき、地盤変位に構造物の応答変位が入っているので、結局構造物と地盤は連成系(feed back系)をなしているということに他ならない。そこで仮定のところでも記したように、この構造物の変動量を、その下端底面の断面主軸を回転の中心として

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

なる定常動揺振動と置くと、短軸方向の振動においては、構造物表面  $\xi = \xi_0$  において、次の

2式が成立せねばならない。

$$\left. \begin{aligned} [u_G^\xi]_{\xi=\xi_0} + [u_\xi]_{\xi=\xi_0} &= \varphi z \cos \theta \\ [u_G^\eta]_{\xi=\xi_0} + [u_\eta]_{\xi=\xi_0} &= \varphi z \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.33)$$

ここで、式(2.10)、式(2.28)および式(2.29)を上式に入れてその両辺に、地盤の固有関数  $Z_m(z)$  を乗じて、 $z$  に関して  $[0, H]$  で積分を行なえば結局次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} C_{mn} \cdot \frac{\partial \text{Fek}_{2n+1}(\xi_0, q_1)}{\partial \xi_0} \text{se}_{2n+1}(\eta, q_1) - D_{mn} \cdot \text{Fek}_{2n+1}(\xi_0, q_2) \frac{\partial \text{ce}_{2n+1}(\eta, q_2)}{\partial \eta} \\ = \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} - \frac{4A_0}{(2m-1)\pi\xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right\} a \sin \eta \\ C_{mn} \cdot \text{Gek}_{2n+1}(\xi_0, q_1) \frac{\partial \text{se}_{2n+1}(\eta, q_1)}{\partial \eta} + D_{mn} \cdot \frac{\partial \text{Fek}_{2n+1}(\xi_0, q_2)}{\partial \xi_0} \text{ce}_{2n+1}(\eta, q_2) \\ = \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} - \frac{4A_0}{(2m-1)\pi\xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right\} b \cos \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.34)$$

そこで、式(2.34)の上・下式の両辺におおの  $\text{se}_{2k+1}(\eta, q_1)$ ,  $\text{ce}_{2k+1}(\eta, q_2)$  を乗じて、 $\eta$  に関して  $[0, 2\pi]$  で積分を行なえば、Mathieu function  $\text{se}_{2k+1}(\eta, q)$ ,  $\text{ce}_{2k+1}(\eta, q)$  の直交性により、有意な解として以下の解をうる事ができる。

$$\left. \begin{aligned} C_{m0} = \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} - \frac{4A_0}{(2m-1)\pi\xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right\} \left[ a B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \frac{\partial \text{Fek}_1(\xi_0, q_2)}{\partial \xi_0} \right. \\ \left. - b A_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \text{Fek}_1(\xi_0, q_2) \right] / \left[ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{\partial \text{Fek}_1(\xi_0, q_2)}{\partial \xi_0} \frac{\partial \text{Gek}_1(\xi_0, q_1)}{\partial \xi_0} - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}^2 \text{Fek}_1(\xi_0, q_2) \text{Gek}_1(\xi_0, q_1) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
D_{m0} = & \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} - \frac{4A_0}{(2m-1)\pi\xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right\} \left[ bA_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \frac{\partial \text{Gek}_1(\xi_0, q_1)}{\partial \xi_0} \right. \\
& - aB_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \cdot \text{Gek}_1(\xi_0, q_1) \left. \right] / \left[ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \cdot \right. \\
& \cdot \frac{\partial \text{Fek}_1(\xi_0, q_2)}{\partial \xi_0} \frac{\partial \text{Gek}_1(\xi_0, q_1)}{\partial \xi_0} - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}^2 \text{Fek}_1(\xi_0, q_2) \text{Gek}_1(\xi_0, q_1) \left. \right] \\
& \dots\dots\dots (2.35)
\end{aligned}$$

ただし、 $A_{2r+1}^{(1)}$ ,  $B_{2r+1}^{(1)}$  は Mathieu function を Bessel function で展開するときの係数であつて、おのおの  $q_2$ ,  $m$  および  $q_1$ ,  $m$  の関数である。

同様にして、長軸方向の振動の場合も次のように得られる。

$$\begin{aligned}
C'_{m0} = & \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} - \frac{4A_0}{(2m-1)\pi\xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right\} \left[ bA_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \frac{\partial \text{Gek}_1(\xi_0, q_2)}{\partial \xi_0} \right. \\
& - aB_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \text{Gek}_1(\xi_0, q_2) \left. \right] / \left[ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \cdot \right. \\
& \cdot \frac{\partial \text{Fek}_1(\xi_0, q_1)}{\partial \xi_0} \frac{\partial \text{Gek}_1(\xi_0, q_2)}{\partial \xi_0} - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}^2 \text{Fek}_1(\xi_0, q_1) \text{Gek}_1(\xi_0, q_2) \left. \right] \\
D'_{m0} = & - \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} - \frac{4A_0}{(2m-1)\pi\xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right\} \left[ aB_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \frac{\partial \text{Fek}_1(\xi_0, q_1)}{\partial \xi_0} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -bA_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \text{Fek}_1(\xi_0, q_1) \Big] / \Big[ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \cdot \\
& \cdot \frac{\partial \text{Fek}_1(\xi_0, q_1)}{\partial \xi_0} \frac{\partial \text{Gek}_1(\xi_0, q_2)}{\partial \xi_0} - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}^2 \text{Fek}_1(\xi_0, q_1) \text{Gek}_1(\xi_0, q_2) \Big] \\
& \dots\dots\dots (2.36)
\end{aligned}$$

ただし、この場合は係数  $A_{2r+1}^{(1)}$ ,  $B_{2r+1}^{(1)}$  はおのおの  $q_1$ ,  $m$  および  $q_2$ ,  $m$  の関数となる。

ところで先述のように、表層地盤内を伝播してきた波動は、構造物表面で散乱されるとともに、構造物自身の運動による放射波を生ずるが、両者の波動は同一の媒体を通過するものであるから、当然同一の取扱いがなされるべきである。そこで、これら散乱・放射波の示す、直応力  $\sigma_\xi$  とせん断応力  $\tau_{\xi\eta}$  とを変位  $u_\xi$ ,  $u_\eta$  を用いて書き表わすと、以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_\xi &= \lambda \Delta + 2\mu e_{\xi\xi} \\
\tau_{\xi\eta} &= \mu e_{\xi\eta} \\
\Delta &= \frac{\partial(\ell u_\xi)}{\ell^2 \partial \xi} + \frac{u_\eta}{\ell^2} \frac{\partial \ell}{\partial \eta} = \frac{\partial u_\xi}{\ell \partial \xi} + \frac{u_\eta}{2\ell^3} k^2 \sin 2\eta \\
e_{\xi\eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u_\eta}{\ell} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\xi}{\ell} \right) \\
\ell &= k \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} = k \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.37)$$

そこで表層よりの地震力について求めるには、運動を許されない剛体柱に作用する散乱波の圧力について考えればよいので、先に得た変位の解である、式(2.28), (2.29)および式(2.30), (2.31)と積分定数、式(2.35)および式(2.36)において、 $\varphi_0 = 0$ としたときの応力  $\sigma_\xi$  および  $\tau_{\xi\eta}$  は以下のように得られる。まず短軸方向の振動では

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{\xi}}{\rho a \cdot A_0 \omega^2 e^{i\omega t}} &= - \left( \frac{2H}{\pi \ell} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi \xi_m^2} P_m(q_2, q_1) \\ \frac{\tau_{\xi\eta}}{\rho a \cdot A_0 \omega^2 e^{i\omega t}} &= - \left( \frac{2H}{\pi \ell} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi \xi_m^2} Q_m(q_2, q_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.38)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} P_m(q_2, q_1) &= M_{21} \left\{ \left( \left( \frac{V_T}{V_L} \right)^2 \left( \frac{\ell}{k} \right)^2 - 2 \left( \frac{\ell}{k} \right)^2 + \cosh 2\xi \right) 4q_1 + 2b_1 \right) \frac{\text{Gek}_1(\xi, q_1)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)} \text{se}_1(\eta, q_1) \\ &\quad + \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sin 2\eta \frac{\text{Gek}_1(\xi, q_1)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)} \text{se}_1(\eta, q_1) - \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sinh 2\xi \frac{\text{Gek}_1(\xi, q_1)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)} \text{se}_1(\eta, q_1) \right\} \\ &\quad + 2N_{21} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sinh 2\xi \frac{\text{Fek}_1(\xi, q_2)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)} \text{ce}_1(\eta, q_2) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sin 2\eta \cdot \text{ce}_1(\eta, q_2) - \text{ce}_1(\eta, q_2) \right) \frac{\text{Fek}_1(\xi, q_2)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)} \right\} \\ Q_m(q_2, q_1) &= M_{21} \left\{ \left( 2 \cdot \text{se}_1(\eta, q_1) - \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sin 2\eta \text{se}_1(\eta, q_1) \right) \frac{\text{Gek}_1(\xi, q_1)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sinh 2\xi \frac{\text{Gek}_1(\xi, q_1)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)} \text{se}_1(\eta, q_1) + N_{21} \left\{ - \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sinh 2\xi \frac{\text{Fek}_1(\xi, q_2)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)} \text{ce}_1(\eta, q_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( (2a_1 + 2q_2(\cosh 2\xi + \cos 2\eta)) \text{ce}_1(\eta, q_2) + \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sin 2\eta \cdot \text{ce}_1(\eta, q_2) \right) \frac{\text{Fek}_1(\xi, q_2)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)} \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.39)$$

ただし  $M_{21}$  および  $N_{21}$  は境界条件、すなわち構造物の断面形状のみに依存する定数であり、次式に示すものである。

$$\left. \begin{aligned} L_{21} &= \frac{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)} \frac{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)} - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}^2 \\ M_{21} &= \frac{1}{L_{21}} \left\{ B_1^{(1)} \frac{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)} - \frac{b}{a} A_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+2}^{(1)} \right\} \\ N_{21} &= \frac{1}{L_{21}} \left\{ \frac{b}{a} A_1^{(1)} \frac{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)} - B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.40)$$

一方、長軸方向の振動においては、応力  $\sigma_\xi$ ,  $\tau_{\xi\eta}$  に関する表示式は、式 (2.38) における  $P_m(q_2, q_1)$ ,  $Q_m(q_2, q_1)$  を以下の  $P_m(q_1, q_2)$ ,  $Q_m(q_1, q_2)$  で置き換えたものである。

$$\begin{aligned}
 P_m(q_1, q_2) = & M_{12} \left\{ \left( \left( \frac{V_L}{V_T} \right)^2 \left( \frac{\ell}{k} \right)^2 - 2 \left( \frac{\ell}{k} \right)^2 + \cosh 2\xi \right) 4q_1 + 2a_1 \right) \frac{\text{Fek}_1(\xi, q_1)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_1)} \text{ce}_1(\eta, q_1) \\
 & + \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sin 2\eta \frac{\text{Fek}_1(\xi, q_1)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_1)} \dot{\text{ce}}_1(\eta, q_1) - \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sinh 2\xi \frac{\text{Fek}_1(\xi, q_1)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_1)} \text{ce}_1(\eta, q_1) \right\} \\
 & + 2N_{12} \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sinh 2\xi \frac{\text{Gek}_1(\xi, q_2)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_2)} \dot{\text{se}}_1(\eta, q_2) \right. \\
 & \left. + \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sin 2\eta \cdot \text{se}_1(\eta, q_2) + \dot{\text{se}}_1(\eta, q_2) \right) \frac{\text{Gek}_1(\xi, q_2)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_2)} \right\} \\
 Q_m(q_1, q_2) = & M_{12} \left\{ \left( 2 \cdot \dot{\text{ce}}_1(\eta, q_1) - \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sin 2\eta \cdot \text{ce}_1(\eta, q_1) \right) \frac{\text{Fek}_1(\xi, q_1)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_1)} \right. \\
 & - \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sinh 2\xi \frac{\text{Fek}_1(\xi, q_1)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_1)} \dot{\text{ce}}_1(\eta, q_1) + N_{12} \left\{ \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sinh 2\xi \frac{\text{Gek}_1(\xi, q_2)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_2)} \text{se}_1(\eta, q_2) \right. \\
 & \left. \left. - \left( (2b_1 + 2q_2(\cosh 2\xi + \cos 2\eta)) \text{se}_1(\eta, q_2) + \left( \frac{k}{\ell} \right)^2 \sin 2\eta \cdot \dot{\text{se}}_1(\eta, q_2) \right) \frac{\text{Gek}_1(\xi, q_2)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_2)} \right\} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 L_{12} = & \frac{\text{Fek}_1(\xi_0, q_1)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_1)} \frac{\text{Gek}_1(\xi_0, q_2)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_2)} - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}^2 \\
 M_{12} = & \frac{1}{L_{12}} \left\{ \frac{b}{a} A_1^{(1)} \frac{\text{Gek}_1(\xi_0, q_2)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_2)} - B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\} \\
 N_{12} = & \frac{1}{L_{12}} \left\{ B_1^{(1)} \frac{\text{Fek}_1(\xi_0, q_1)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_1)} - \frac{b}{a} A_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

以上のようにして、静止剛構造物により散乱される波動の圧力分布を計算することができる。構造物表面より放射される波動についても全く上記と同様な取扱いをなしうることは明らかである。

かくして、地中の剛な基礎構造物が動揺振動を行なうときには、散乱・放射波により両土圧を合成した力が構造物に側圧として作用することになる。したがって、先述のように積分定数

を求めたときにも示されていたように、側圧には基盤振幅  $A_0$  のみならず構造物の回転角振幅  $\varphi_0$  をパラメーターとして内蔵することになる。そこで構造物の単位長当りに作用する側圧を  $p(z)$  とすると、図 2.2 を参照して短軸方向の側圧  $p(z)$  は次式で計算される。

$$\begin{aligned} p(z) &= \oint_{\xi_0} \{ \sigma_{\xi} \cdot \sin \theta + \tau_{\xi\eta} \cos \theta \} ds \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \{ a \sin \eta \cdot \sigma_{\xi} + b \cos \eta \cdot \tau_{\xi\eta} \} d\eta \end{aligned}$$

そこで式 (2.28), (2.29) の変位, および式 (2.35) の積分定数を式 (2.37) の変位と応力の関係式に持込むと, 計算の結果は次のような比較的簡潔な表現をうる。

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \rho \pi \omega_g^2 \xi_m^2 \left\{ C_{m0} \cdot a B_1^{(1)} \text{Gek}_1(\xi_0, q_1) + D_{m0} \cdot b A_1^{(1)} \text{Fek}_1(\xi_0, q_2) \right\} \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \rho \pi a^2 \omega_g^2 \xi_m^2 \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} - \frac{4A_0}{(2m-1)\pi \xi_m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right\} Q_m \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.43)$$

ところで, 上記側圧の  $\{ \quad \}$  内の第 1 項目が放射波によるもので, 第 2 項目が散乱波によるものであることは明白である。

ここに,

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{(B_1^{(1)})^2 \frac{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 (A_1^{(1)})^2 \frac{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)} - 2 \frac{b}{a} A_1^{(1)} B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)}}{\frac{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)}{\text{Fek}_1(\xi_0, q_2)} \frac{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)}{\text{Gek}_1(\xi_0, q_1)} - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}^2} \\ &\dots\dots\dots (2.44) \end{aligned}$$

および,  $\text{Fek}_1(\xi_0, q) = \frac{\partial \text{Fek}_1(\xi_0, q)}{\partial \xi_0}$ ,  $\text{Gek}_1(\xi_0, q) = \frac{\partial \text{Gek}_1(\xi_0, q)}{\partial \xi_0}$  を表わすものとし, 展開係数  $A_{2r+1}^{(1)}$  および  $B_{2r+1}^{(1)}$  については

$$\sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 = \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 = \frac{1}{\pi} \quad \dots\dots\dots (2.45)$$

のように正規化されているものとする。

このとき, 底面の中心軸 ( $x$  軸) のまわりの楕円柱の受ける回転モーメント  $M$  は次式のように簡単に計算される。



$$\begin{aligned}
M &= \int_0^H p(z) \cdot z dz \\
&= - \sum_{m=1}^{\infty} \rho \pi a^2 \frac{4H^2(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \pi^2} \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} - \frac{4A_0}{(2m-1)\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right\} \mathcal{Q}_m \xi_m^2 \omega_g^2 e^{i\omega t} \\
&\dots\dots\dots (2.46)
\end{aligned}$$

ところで、円柱の場合は楕円柱の特別な場合の1つであるが、上記の Mathieu function から直接導くことは困難であるが、同様な手法により解析を進めれば、この  $\mathcal{Q}_m$  のみを

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_m &= \frac{\frac{K_1(\alpha_m a)}{\alpha_m a} \cdot \frac{\partial K_1(\beta_m a)}{\partial(\beta_m a)} + \frac{K_1(\beta_m a)}{\beta_m a} \frac{\partial K_1(\alpha_m a)}{\partial(\alpha_m a)} - 2 \frac{K_1(\alpha_m a)}{\alpha_m a} \frac{K_1(\beta_m a)}{\beta_m a}}{\frac{\partial K_1(\alpha_m a)}{\partial(\alpha_m a)} \frac{\partial K_1(\beta_m a)}{\partial(\beta_m a)} - \frac{K_1(\alpha_m a)}{\alpha_m a} \frac{K_1(\beta_m a)}{\beta_m a}} \\
&= \frac{\frac{K_0(\alpha_m a)}{K_1(\alpha_m a)/\alpha_m a} + \frac{K_0(\beta_m a)}{K_1(\beta_m a)/\beta_m a} + 4}{\frac{K_0(\alpha_m a)}{K_1(\alpha_m a)/\alpha_m a} \frac{K_0(\beta_m a)}{K_1(\beta_m a)/\beta_m a} + \frac{K_0(\alpha_m a)}{K_1(\alpha_m a)/\alpha_m a} + \frac{K_0(\beta_m a)}{K_1(\beta_m a)/\beta_m a}} \\
&\dots\dots\dots (2.47)
\end{aligned}$$

とすれば、楕円柱の場合の側圧  $p(z)$ あるいは回転モーメント  $M$ 等の式をそのまま共通に使用することができる。

一方、長軸方向の振動の場合も同様にして

$$\begin{aligned}
p(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \rho \pi \omega_g^2 \xi_m^2 \left\{ C_{m0}' \cdot b A_1^{(1)} \text{Fek}_1(\xi_0, q_1) - D_{m0}' \cdot a B_1^{(1)} \text{Gek}_1(\xi_0, q_2) \right\} \sin \alpha_m' z \cdot e^{i\omega t} \\
&= - \sum_{m=1}^{\infty} \rho \pi a^2 \omega_g^2 \xi_m^2 \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^m}{(2m-1)^2} - \frac{4A_0}{(2m-1)\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right\} \mathcal{Q}_m \sin \alpha_m' z \cdot e^{i\omega t} \\
&\dots\dots\dots (2.48)
\end{aligned}$$

また、短軸 ( $y$  軸) まわりの回転モーメント  $M$  は式 (2.46) と同様の形になることは明らかで、ただ  $\mathcal{Q}_m$  のみを

$$Q_m = \frac{(B_1^{(1)})^2 \frac{F \dot{e} k_1(\xi_0, q_1)}{Fek_1(\xi_0, q_1)} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 (A_1^{(1)})^2 \frac{G \dot{e} k_1(\xi_0, q_2)}{Gek_1(\xi_0, q_2)} - 2 \frac{b}{a} A_1^{(1)} B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)}}{\frac{F \dot{e} k_1(\xi_0, q_1)}{Fek_1(\xi_0, q_1)} \frac{G \dot{e} k_1(\xi_0, q_2)}{Gek_1(\xi_0, q_2)} - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}^2} \quad \dots\dots\dots (2.49)$$

として用いればよいことがわかる。

ところで、静止剛体基礎に作用する地震力は、式(2.43)あるいは式(2.48)における側圧の式で、 $\varphi_0 = 0$  とすれば求められるので、これを  $p_0(z)$  とし、これに対応する回転モーメントを  $M_0$  とすると

$$p_0(z) = \rho \pi a^2 \cdot A_0 \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi} Q_m \sin \alpha'_m z \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.50)$$

$$M_0 = \rho \pi a^2 \cdot H^2 \cdot A_0 \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16 \cdot (-1)^{m-1}}{(2m-1)^3 \pi^3} Q_m \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.51)$$

一方、式(2.43)の  $p(z)$  や式(2.46)の  $M$  において  $A_0 = 0$  としたものは、表層地盤中にある基礎構造物を起振器等で強制回転変位を与えたときの、周辺地盤の総反力を示している。そこで、この場合の側圧モーメント反力を各々  $p_1(z)$  および  $M_1$  とすると以下のようなになる。

$$p_1(z) = -\rho \pi a^2 \cdot \omega_g^2 \cdot \varphi_0 H \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} Q_m \xi_m^2 \sin \alpha'_m z e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.52)$$

$$M_1 = -\rho \pi a^2 \cdot \omega_g^2 \cdot \varphi_0 H^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} Q_m \xi_m^2 \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.53)$$

これらの  $p_1(z)$  および  $M_1$  は、角振幅  $\varphi_0$  に 1 次的に比例して増加することを示しており、 $\varphi_0 e^{i\omega t}$  以外の量はいわば動的複素ばね剛性を意味するものと解されよう。

## 2.3 地中構造物の動揺振動

### 2.3.1 動揺振動の運動方程式

剛な基礎構造物の動揺振動を論ずるには、外力として、基盤より受ける慣性力と同時に、表層地盤よりの側圧あるいは回転モーメントを考慮しなければならない。ところで構造物の定常

角振幅  $\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$  というのは、表層よりの回転モーメントを  $M$  とすると、次の運動方程式を解くことによって得られる。

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c_s \frac{d\varphi}{dt} + k_R \varphi = -m_0 H_G \frac{d^2 u_B}{dt^2} + M \quad \dots\dots\dots (2.54)$$

ここに、 $m_0$ ：楕円柱の総質量、 $H_G$ ：基盤面より構造物重心点までの高さ、 $J$ ：回転中心軸まわりの慣性モーメント、 $k_R$ ：接触面における基盤の回転ばね係数、 $c_s$ ：動揺粘性減衰係数。

ここで式(2.54)を解くために、式(2.46)を持込めばよいのであるが、先述のように、この回転モーメント  $M$  自身は動揺振動の角振幅  $\varphi_0$  をパラメーターとして内蔵しているので、結局基礎構造物の動揺振動に関する運動方程式、式(2.54)は角振幅  $\varphi_0$  に関して feed back 系を構成していることが分る。

### 2.3.2 構造物の周波数応答倍率

基礎構造物の定常動揺振動の角振幅  $\varphi_0$  は、式(2.54)より容易に次のように得られる。

$$\varphi_0 = \frac{m_0 H_G + \frac{16 a^2 \rho H^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^3} \mathcal{Q}_m}{k_R + c_s \cdot i\omega - J\omega^2 + \frac{32 a^2 \rho H^3}{\pi^3} \omega_R^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_m^2}{(2m-1)^4} \mathcal{Q}_m} A_0 \omega^2 \quad \dots\dots\dots (2.55)$$

この結果より、 $\varphi_0$  の分母第4項は放射波によって生ずる表層地盤の動的ばね係数、分子第2項は表層よりの地震力に相当することが分る。そこで田治見<sup>8)</sup>と同様にして、 $\omega = 0$ ，すなわち静的な場合の  $\mathcal{Q}_m$  を  $\mathcal{Q}_{ms}$  とし、このとき式(2.55)の分母第4項は静的水平ばね剛性となるので、これと基盤の回転ばね係数  $k_R$  との比を  $\chi$  とすると、

$$\frac{32 a^2 \rho H^3 \omega_R^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathcal{Q}_{ms}}{(2m-1)^2} = \chi k_R \quad \dots\dots\dots (2.56)$$

と置ける。この  $\chi$  は表層地盤の静的全水平反力の基盤の回転反力に対する比あるいは、静的全側圧の回転による全底面圧に対する比とも言い直すことができる。そこで

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_m^2}{(2m-1)^4} Q_m}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_{ms}}{(2m-1)^2}} &= f_1 + if_2 \\ \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^3} Q_m}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_{ms}}{(2m-1)^2}} &= g_1 + ig_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.57)$$

と置き換えると、明らかに、 $f_1 + if_2$  は表層地盤のばね作用の動的効果を、 $g_1 + ig_2$  は表層よりの地震力の動的効果をそれぞれ示す量となる。

そこで基盤より  $z$  の高さにおける、基礎構造物の水平変位の応答倍率を  $|\kappa(i\omega; z)|$  と表わすと、それは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} |\kappa(i\omega; z)| &= \left| \frac{\varphi_0 z + A_0}{A_0} \right| \\ &= \left| 1 + \frac{\frac{Hz}{i_0^2} \left(\frac{\omega_g}{\omega_s}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \chi(g_1 + ig_2)}{1 + 2ih_s \frac{\omega}{\omega_s} - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 + \chi(f_1 + if_2)} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right| \dots\dots\dots (2.58) \end{aligned}$$

ここに、 $\rho_s$  : 楕円柱の密度、 $\omega_s$  : 構造物の動揺振動に対する固有円振動数、 $m_0$  : 構造物の総質量、 $J$  : 回転軸まわりの慣性モーメントであって、

$$i_0 = \sqrt{\frac{J}{m_0}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k_R}{J}}, \quad m_0 = \rho\pi abH_s, \quad \frac{c_s}{J} = 2h_s\omega_s$$

および

$$J = \begin{cases} m_0 \left( \frac{b^2}{4} + \frac{H_s^2}{3} \right) & : \text{短軸方向の振動} \\ m_0 \left( \frac{a^2}{4} + \frac{H_s^2}{3} \right) & : \text{長軸方向の振動} \end{cases}$$

ところで、基盤の取扱いについては、2.1の概説においても触れたように、本来は振動時に構造物底面より放射される逸散波について考慮しなくてはならないが、このような系の厳密な取扱いは容易ではない。ここでは、表層地盤の動的効果に着目するため、次のような

$$k_R \propto \frac{E_0 I_0}{\sqrt{A}} \quad \dots\dots\dots (2.59)$$

という簡単な静的関係<sup>9)</sup>を用いることにする。ただし、 $E_0$ ：基盤のヤング係数、 $I_0$ ：構造物と基盤との接触面の断面2次モーメント、 $A$ ：接触底面積である。

そこで、構造物の幾何学形状に無関係な諸量を一定にすると、静的水平反力と基盤の回転反力との比 $\chi$ （式(2.56)）および構造物の固有円振動数 $\omega_s$ と表層地盤のせん断1次固有円振動数 $\omega_g$ との比は以下のように与えられる。

短軸方向の振動の場合：

$$\chi = c_1 \frac{H}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_{ms}}{(2m-1)^2}, \quad \frac{\omega_s}{\omega_g} = c_2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{b}{4H} + \frac{H}{3b}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots (2.60)$$

一方、長軸方向の振動の場合は：

$$\chi = c_1 \frac{H}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_{ms}}{(2m-1)^2}, \quad \frac{\omega_s}{\omega_g} = c_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{a}{4H} + \frac{H}{3b}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots (2.61)$$

ところで、式(2.60)および式(2.61)の静的反力比 $\chi$ を、各種断面形の構造物に対して比較したものは、静的な表層地盤反力と基盤による回転反力との相対的な値の比較になる。そこで、まず各種断面形における、表層地盤の水平反力の比較を行なうために、円断面の場合の底面回転反力係数 $k_{RC}$ と静的反力比 $\chi_C$ とでもって正規化する。すなわち、各断面形における水平静的反力 $k_R \chi$ の円断面のそれ $k_{RC} \chi_C$ に対する比は

$$\frac{k_R \chi}{k_{RC} \chi_C} = \frac{\chi}{\chi_C} \frac{I}{I_C} \sqrt{\frac{A_C}{A}} = \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^3 \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{\chi}{\chi_C} & : (\text{短軸方向の振動}) \\ \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{\chi}{\chi_C} & : (\text{長軸方向の振動}) \end{cases} \quad \dots (2.62)$$

で与えられる。ここに添字 $C$ を付したものは、円断面の場合を表わすものとする。

## 2.4 数値計算結果とその考察

### 2.4.1 表層地盤内の圧力分布

地中に埋設されている構造物が、周辺地盤より受ける地震力は、地盤の直圧力およびせん断力を通してである。この地震力は、これらの力が構造物と周辺地盤との境界面に沿って作用する総合力であるから、実際の地震時に構造物で感受されるものから、直圧力とせん断力の相互の作用の仕方を独立に知ることはできない。というのは、振動時の構造物の位相と、地震力の位相とは必ずしも等しくはなく、かつ計測される量はその絶対値であるからである。また直圧力とせん断力とはその構造物に対する作用の仕方が異なるので、当然のことながら構造物の断面形状によっても、両者の効果は大いに異なることになるであろう。このような点について検討を加えるために、静止した構造物の表面で散乱された地震波動の、地盤内応力についての数値計算結果を図示したのが、図 2.5 ～ 図 2.10 である。これらの図においては、各応力は、半径  $a$ 、厚さ 1 の円板に相当する地盤が、振幅  $A_0$  の単弦振動時に持つ慣性力でもって除して、無次元化されている。

図 2.5 および図 2.6 はおのおの、長軸および短軸方向の振動における、構造物表面に作用する地震力を、種々の断面の場合について、直圧力とせん断力とに別けて、これらが  $\omega/\omega_g = 1$  すなわち表層地盤の第 1 次共振時における応力状態について図示したものであるが、粘性減衰効果のために、共振時の共振振幅したがってひずみは有限値となるので、地盤内応力もすべて有限値にとどまっている。なお振動方向は長・短軸いずれかの方向であるから、周面での応力状態は主軸に関して対称になり、各断面における 4 分の 1 周面上に直応力  $\sigma_\xi$  とせん断応力  $\tau_{\xi\eta}$  の無次元量およびその絶対値について図示したもので、周面の外および内側に向っておのおの正負の符号をとり、各応力の大きさは、その延長線が断面中心を通る矢印の大きさと与えられている。

図 2.5 の長軸方向の振動においては、断面の長短径比  $a/b = 2$  の場合のように、 $a/b$  が比較的小さいときは振動方向における断面先端部  $P$  点付近では、直応力  $\sigma_\xi$  はかなり大きい、せん断応力  $\tau_{\xi\eta}$  はきわめて小さく無視しうるほどである。しかるに長短径比  $a/b$  が大すなわち断面が扁平になるにつれて、断面先端部  $P$  点近傍では直応力のみならず、せん断応力についても、応力集中の現象が現われてくることが分る。このように、長軸方向の振動においては、断面の曲率の大なる所で応力集中が激しく、その傾向は直応力  $\sigma_\xi$  の方が大きい、このような曲率大なる断面先端部以外の部分の応力分布状態は、断面形にほとんど依存することなく、ほぼ一定の値を示すことがわかる。

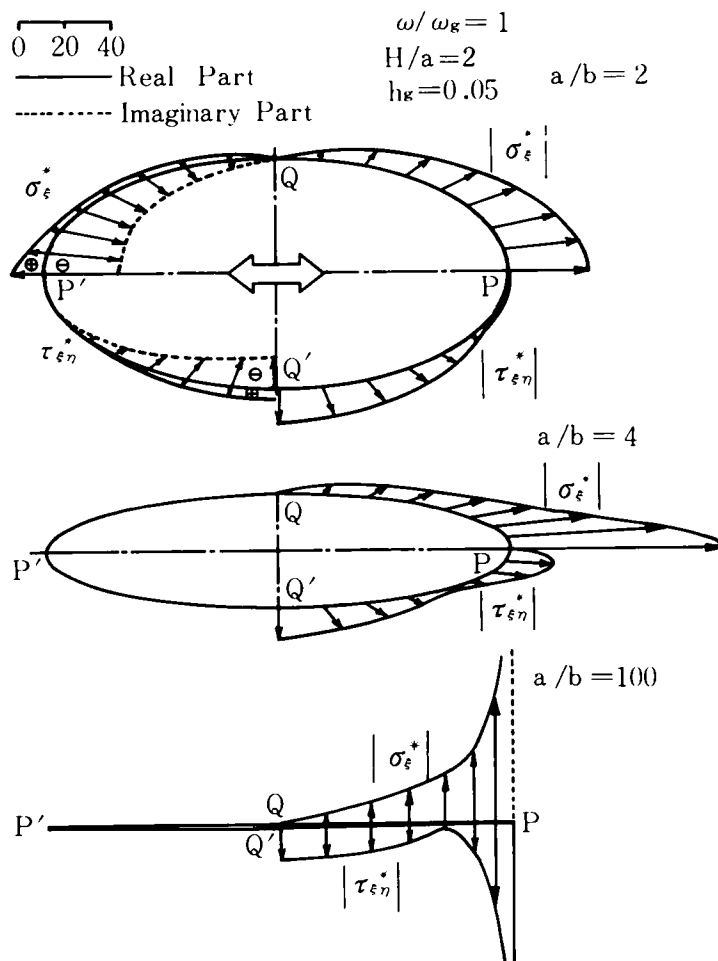


図 2.5 地震力の周面分布（長軸方向）

一方図 2.6 の短軸方向の振動について見ると、全般的にせん断応力  $\tau_{\epsilon\eta}$  の方が直応力  $\sigma_{\epsilon}$  よりも大きく周辺分布している傾向にあり、長軸方向の振動の場合と同様に、断面が扁平になるにつれて曲率の大きな先端部  $P$  点の近傍で応力の集中が見られる。特にこの方向の振動では、せん断応力の応力集中現象は断面の扁平さを非常に鋭敏に反映するが、直応力の方は応力集中の現象はそれほど顕著ではなく、断面が扁平になるにつれて  $P$  点以外の所では、ほぼ一定の圧力分布に近づくことが示されている。このように、長・短径の異なる断面を持つ構造物にあっては、周面に曲率の大きな部分が存在するので、そこに応力の集中が起りやすいが、地震力を形成する直圧力とせん断力は振動方向によって全く異なった分布を示し、同一断面の場合では、短軸方向の振動における方が地震力はやや大きいと言えよう。

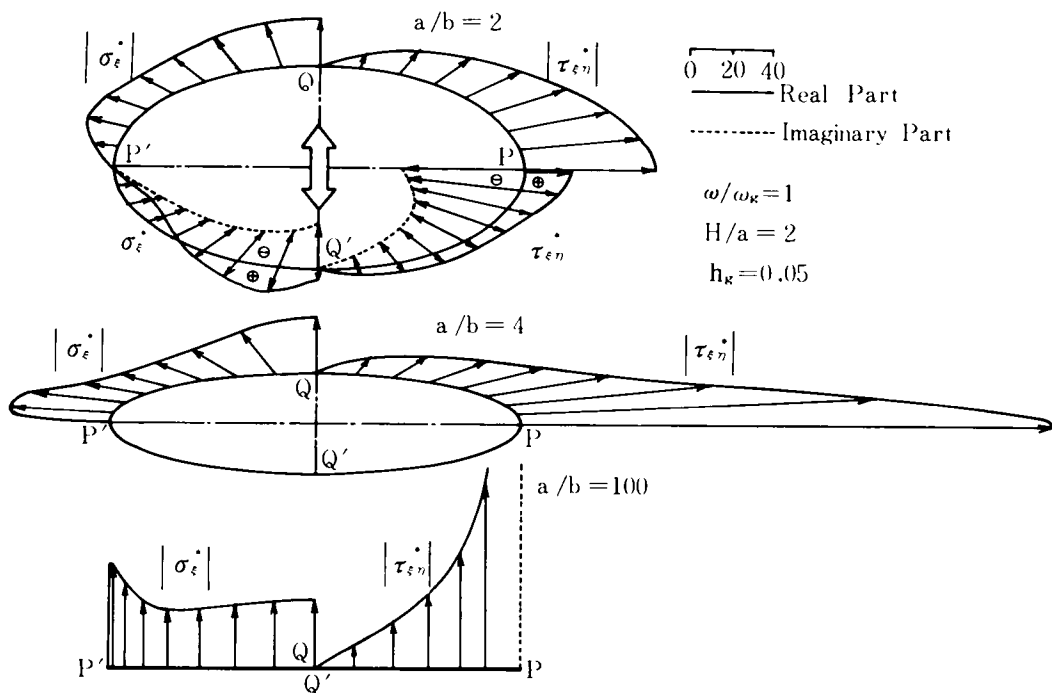


図 2.6 地震力の周面分布（短軸方向）

次に構造物表面に地震力として来襲した波動は、周面で散乱された後その振幅が表層地盤内の伝播距離といかなる関係にあるかを示したのが、図 2.7～図 2.10 である。

図 2.7 と図 2.8 の長軸方向の振動においては、 $P$ 点における直応力  $\sigma_{\xi,P}$ 、 $Q$ 点におけるせん断応力  $\tau_{\xi\eta,Q}$  とともに、構造物よりの距離とともにその振幅は単調に減少して行くことを示している。表層の共振時  $\omega/\omega_g = 1$  では、この散乱波の波圧の実部および虚部ともに増大し、入力に対する位相遅れは  $45^\circ$  を若干超しているが、さらに  $\omega > \omega_g$  になると散乱波の圧力振幅はその実部、虚部ともに負となって、地震力の入力に対する位相差はさらに拡がり、圧力振幅の符号は入力に対して反転する。すなわち、 $\omega < \omega_g$  では地震力の方向は、入力と同じであるが、 $\omega > \omega_g$  では両者の関係は互に逆向きにすることを示しているといえよう。

一方、図 2.9 と図 2.10 の短軸方向の振動においても、散乱波の圧力振幅は伝播距離とともに単調に減少する傾向は、長軸方向の振動の場合と同様であるが、 $Q$ 点における直応力  $\sigma_{\xi,Q}$  の弛緩の割合は非常にゆるやかであるのに反し、 $P$ 点におけるせん断応力  $\tau_{\xi\eta,P}$  は構造物の表面では大きな値を示すにもかかわらず、伝播距離とともに急速にその圧力振幅は減少する傾向



があるようである。このような傾向から推察すると、応力集中はせん断応力の方が直応力の場合よりも、局所的に生じやすい現象とも言えよう。

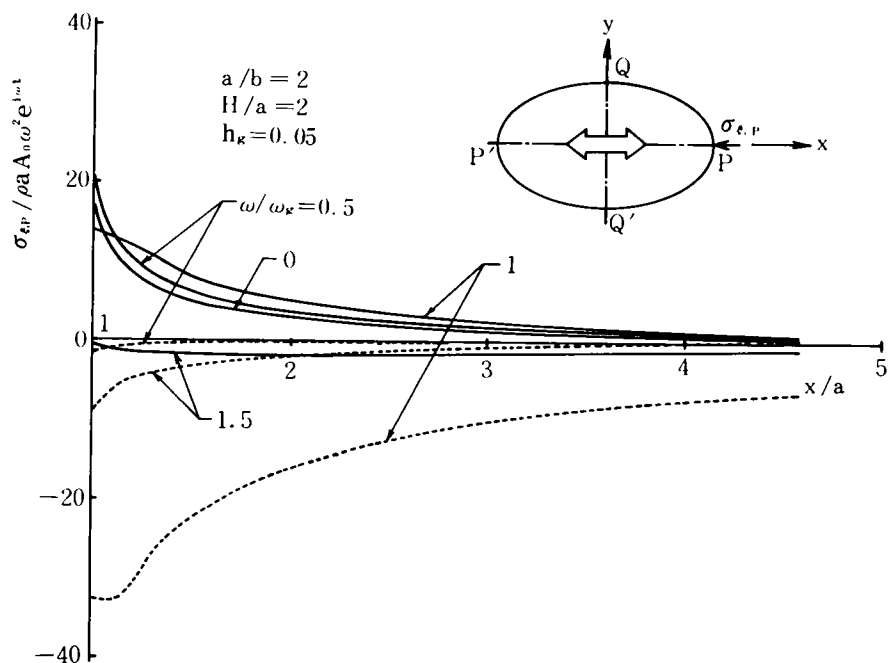


図 2.7 散乱波の周辺地盤内応力分布（長軸方向）

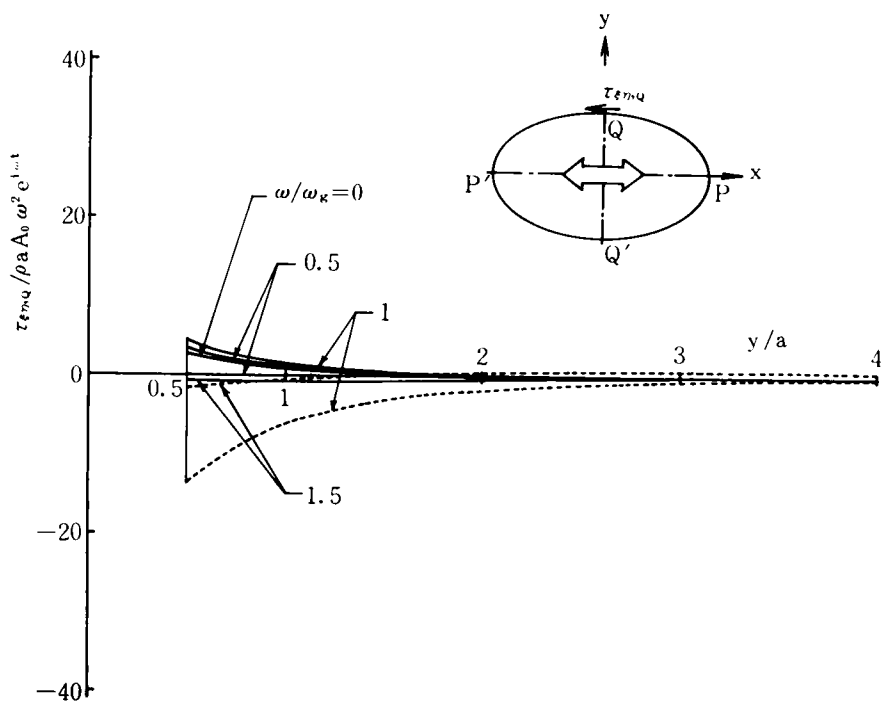


図 2.8 散乱波の周辺地盤内応力分布（長軸方向）

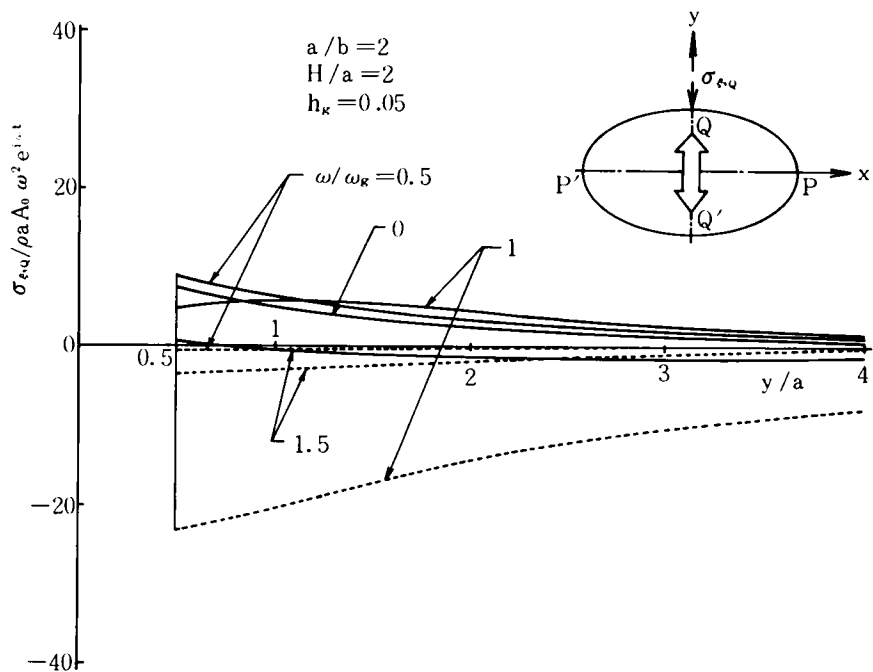


図 2.9 散乱波の周辺地盤内応力分布（短軸方向）

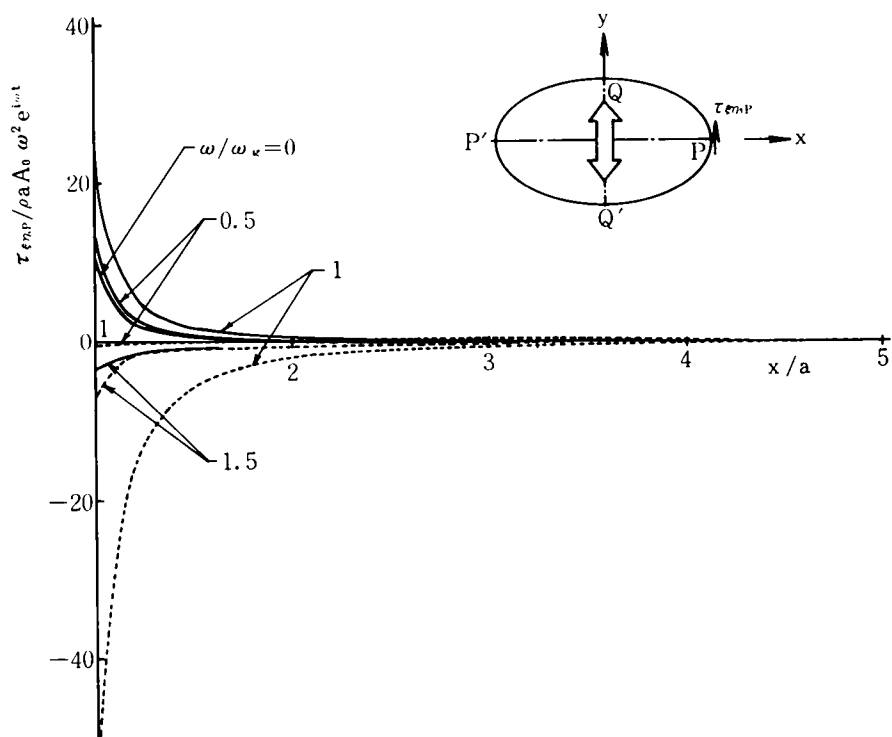


図 2.10 散乱波の周辺地盤内応力分布（短軸方向）

#### 2.4.2 表層地盤のばね剛性および地震力の動的効果

表層地盤と基盤との静的反力比 $\chi$ については、図 2.11 に示しているが、同図(a)の表層厚 $H$ と長半径 $a$ との比 $H/a$ を一定とした場合では、長軸方向の回転抵抗は断面の長短径比 $a/b$ の値にそれほど影響を受けないが、短軸方向のそれは長短径比 $a/b$ の増大とともに、急速に $\chi$ の値は増大する。ところで、図中のMinor, Major はおのおの、短軸および長軸方向の運動を示すものである。一方、同図(b)では長短径比 $a/b$ を一定にした場合の、表層厚 $H$ の影響を見たものである。

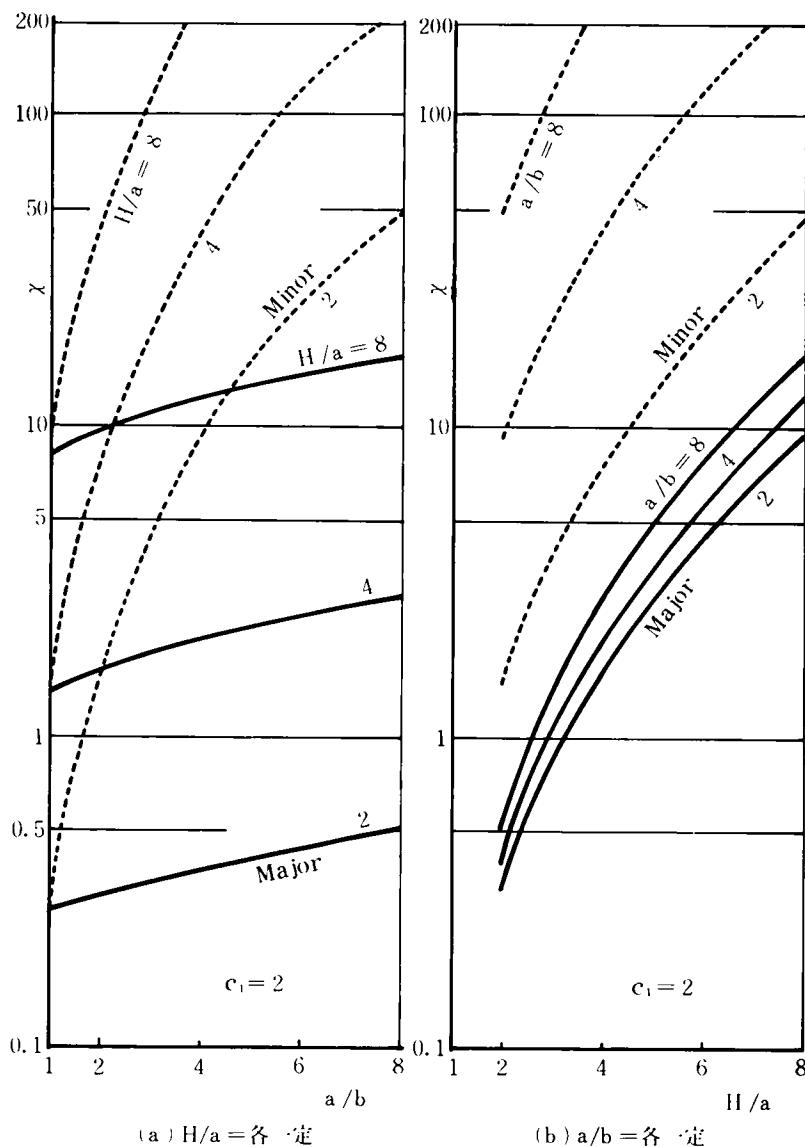


図 2.11 静的水平反力と底面反力の比  $\lambda$

層厚 $H$ の増加とともに静的反力比 $\chi$ は急速に増大し、短軸方向における $\chi$ の方が長軸方向の振動の場合よりも相当大きく、この傾向は長短径比 $a/b$ の増加とともに著しくなる。このような $\chi$ が急激に増加する場合は、主として底面の回転半径の低下に負うところが大きいであろうが、側圧の長短径比 $a/b$ に対する変動が定かでないので、量的比較からの推論ができない。そこで楕円柱の場合の静的水平反力と円柱の場合のそれとの比の形で示したのが図 2.12 である。

図 2.12 において、短軸方向の回転では、 $H/a=2$  の場合のように、ある層厚では静的水平反力は断面形、すなわち長短径比 $a/b$ の如何によっては円断面の場合よりも大きくなることがあることを示しており、短軸方向における表層の抵抗の仕方は複雑であることが分る。しかしながら、層厚 $H$ が大きくなるとこの反力は断面形にあまり依存しなくなり、円断面の場合と大差なくほぼ一定値をとるようである。一方長軸方向の静的水平反力は、円断面の場合に比較してかなり小さく、特に長短径比 $a/b=2\sim3$  くらいまでは、断面が扁平なほど単調かつ急激に低下するようである。またこの静的反力比 $\chi$ は層厚 $H$ が大なるほど大きくなり、かつ扁平度の増大とともに一定値に落ち着く傾向がある。このように、直応力 $\sigma_z$ の受圧面の減少が静的水平反力の低下をもたらすものといえよう。

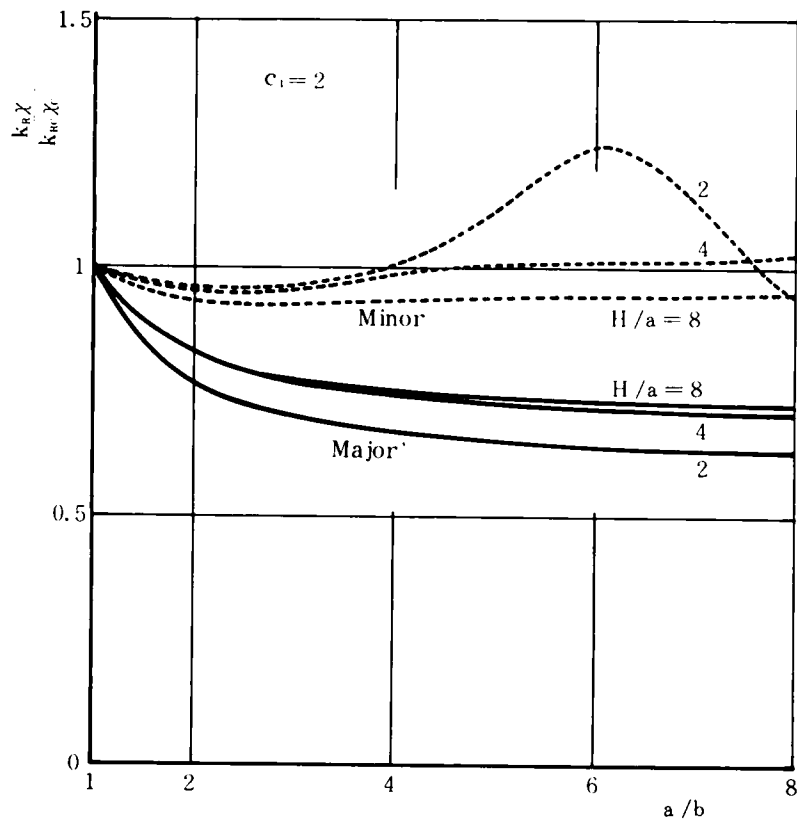


図 2.12 静的水平反力の断面形依存度

さて、構造物と表層地盤との相互作用の結果、後者は前者に対してばねの作用を持つが、この際構造物表面より放射される波動が水平方向に伝播性があることと、内部減衰（粘性減衰）が存在するとしていることから、このばね剛性あるいは係数に相当する量は、一般には複素表示で与えられることになり、その実部は構造物の運動に対するばね反力として、虚部は減衰力として働くことになる。このとき、振動数 $\omega$ に対する影響を示したのが、図 2.13 ～図 2.16 における、ばね剛性の動的効果すなわち式 (2.57) の  $f_1, f_2$  である。これらの図は長短径比  $a/b$  の種々の値に対する動的効果であるから、相異なる断面形相互のばね剛性の量的な比較はできないが、式 (2.58) から分るように先述の図 2.11 における静的反力比  $\chi$  をこれらの  $f_1 + if_2$  に乗じた  $\chi(f_1 + if_2)$  により、ばね剛性の量的比較がなされうるものである。そこで実部  $f_1$  および虚部  $f_2$  の評価であるが、図 2.13 ～図 2.16 を通覧すると、概略的には  $f_1$  は振動数に無関係な定数と  $\omega$  の 2 次曲線の結合された形と見なされ、一方  $f_2$  はそのこう配  $df_2/d\omega$  は  $\omega > \omega_g$  ではほぼ一定と見なしでもよいであろう。

実部  $f_1$  がもし振動数に無関係な定数であれば、式 (2.58) の分母の構成から分るように、明らかに構造物底面の回転ばね剛性を高めることになり、したがって見かけ上構造物の共振点を固有円振動数  $\omega_g$  よりも高める効果を与える。もし振動数  $\omega$  の 2 次曲線に比例して減少する場合は、同様の理屈から構造物の質量を増大させる効果を持つことになり、その結果は上記とは逆に構造物の共振点の位置を見かけ上、振動数の小さい方へ移行させる効果を持つことになる。

図 2.13 および図 2.14 は層厚  $H$  と長半径  $a$  との比が一定値  $H/a = 2$  の場合の計算例である。

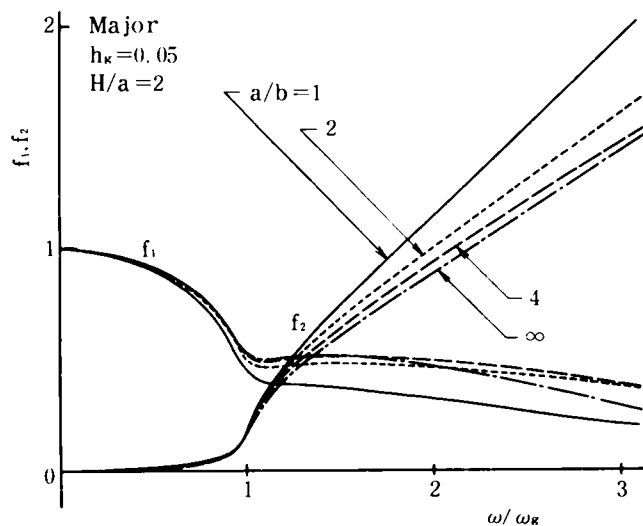


図 2.13 ばね剛性の動的効果

図 2.13 の長軸方向の振動においては、 $\omega < \omega_g$  では実部  $f_1$  は 1 より 2 次曲線的に急速に減少して行くので、この区間ではばね作用と質量作用が共に効いているが、 $\omega > \omega_g$  になると、実部  $f_1$  はほぼ一定値となり、ばね作用のみが卓越してきて断面形状の差による  $f_1$  相互間の差はそれほど大きくはない。一方、虚部  $f_2$  は  $\omega < \omega_g$  では徐々に増加しているが、この振動数領域では表層地盤の振幅は入力振幅に対して同位相であるため、波動の逸散現象は起らず、したがって、 $\omega < \omega_g$  における  $f_2$  の値は表層地盤内での粘性減衰により生じている減衰効果そのものである。 $\omega > \omega_g$  になると  $f_2$  のこう配は急速に増大するが、これは放射された波動が無遠方に逸散していくことにより生ずるもので、その減衰効果は通常の内部粘性減衰に比べて非常に大きく、かつ速度比例の粘性減衰として評価しうることが特徴である。そこで、この粘性減衰の効果を

$$f_2 = \alpha \cdot \frac{\omega}{\omega_g}, \quad (\alpha : \text{こう配})$$

と表わすと、式 (2.58) の分母の虚数部は

$$2 i h_s \frac{\omega}{\omega_s} + \chi \cdot i f_2 = 2 i \left( h_s + \chi \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\omega_s}{\omega_g} \right) \frac{\omega}{\omega_s}$$

と変形できるので、( ) 内の第 2 項目が動揺振動の換算粘性減衰定数に相当する量であり、これを  $h_{eq}$  とすると、図 2.13 の長軸方向の振動の場合においては、長短径比  $a/b = 1$  (円), 2, 4,  $\infty$  (板) の場合についておのおの  $h_{eq}$  は

$$h_{eq} = \frac{\alpha}{2} \cdot \chi \cdot \frac{\omega_s}{\omega_g} \cong \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0.96 \\ 0.74 \\ 0.66 \\ 0.66 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.280 \\ 0.303 \\ 0.377 \\ 1.706 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.128 \\ 1.337 \\ 1.589 \\ \infty \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.15 \\ 0.16 \\ 0.20 \\ \infty \end{vmatrix}$$

と等価的に算出される。これらの逸散減衰による等価粘性減衰定数  $h_{eq}$  は、構造物の臨界減衰の 15% 以上にも及ぶことが分り、これらの量は静的反力比  $\chi$  と構造物の固有円振動数  $\omega_s$  との比の大きさに比例的であるから、長軸方向の振動の場合、 $\chi$  の値に対する長短径比  $a/b$  の影響は小さくても、 $\omega_s/\omega_g$  の値は  $a/b$  の増大とともに急速に増大するので、理論上では無限大の大きさの減衰定数の値が得られることになる。しかしながら、実際上は  $a/b = \infty$  というような断面の構造物は存在しないので、換算減衰定数  $h_{eq}$  は有限な値となる。このように長軸方向の振動においては、 $\omega > \omega_g$  では断面が扁平なほど逸散による減衰が大きく効くので、構造物は

表層の共振 ( $\omega = \omega_g$  による) の影響を受けても,  $\omega = \omega_s$  の近傍での共振は生じにくくなることが推察される。

次に図 2.14 の短軸方向の振動における, ばね剛性の動的効果を見ると, 実部  $f_1$  は  $\omega < \omega_g$  では長軸方向の振動の場合と同様に, 振動数の 2 乗に比例して減少し,  $\omega > \omega_g$  の領域に入ってもなお減少を続け, 遂には負の値になるが, この傾向は断面が偏平になるほど著しい。このように短軸方向の振動においては, 振動数の如何にかかわらず表層地盤はばね作用のみならず, 質量作用が存在し, それゆえ  $\omega = \omega_s$  での共振振動数の増減に寄与する効果はそれほど顕著ではなからう。

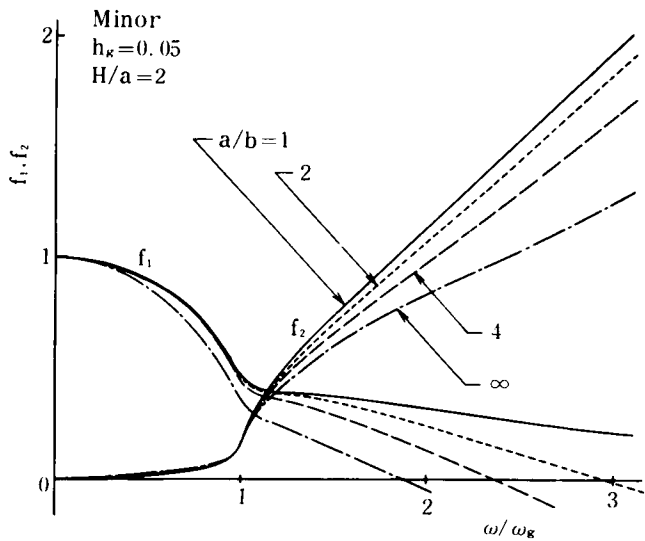


図 2.14 ばね剛性の動的効果

一方, 虚部  $f_2$  は同様に  $\omega < \omega_g$  では, 粘性減衰の小さな影響が出ているが,  $\omega > \omega_g$  ではほぼ直線的に急速に増大し, 偏平な断面ほど動的効果は小さいことが示されている。そこで長軸方向の振動の場合と同様にして, 逸散減衰による等価粘性減衰定数  $h_{eq}$  は, 長短径比  $a/b = 1$  (円), 2, 4,  $\infty$  (板) の順にそれぞれ以下のように算出される。

$$h_{eq} = \frac{\alpha}{2} \cdot \chi \cdot \frac{\omega_s}{\omega_g} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0.96 \\ 0.92 \\ 0.78 \\ 0.52 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.280 \\ 1.529 \\ 9.129 \\ \infty \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1.124 \\ 0.712 \\ 0.430 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.15 \\ 0.50 \\ 1.53 \\ \infty \end{Bmatrix}$$

このように, 偏平な断面の構造物はその短軸方向の振動においては, 逸散減衰が過減衰 ( $h_{eq}$

> 1.0 ) の状態に相当する場合もあることは注目に値する。しかしながら、この計算例では円断面を除いて他の偏平な断面の構造物では、その固有円振動数  $\omega_s$  が表層のせん断 1 次の固有円振動数  $\omega_g$  より小さいため、この大きな逸散減衰の効果が構造物の共振点  $\omega \cong \omega_s$  にほとんど影響はなく、ただ粘性減衰作用のみを減衰効果として受けるだけである。したがって、 $\omega < \omega_g$  での構造物の応答は、粘性減衰係数の大小に依存するのはもちろんであるが、相当大きくなるのであろうことが推察される。このように、偏平な構造物において、表層厚  $H$  を一定にしておく限りでは、剛な構造物はその断面の短軸方向の振動において、 $\omega_s < \omega_g$  となりがちであるから、その応答量は相当大きくなる可能性があり、設計上においても十分の配慮を要する点であろう。

図 2.15 および図 2.16 は、表層地盤厚  $H$  の変化に対する、ばね剛性の動的効果を示したものである。

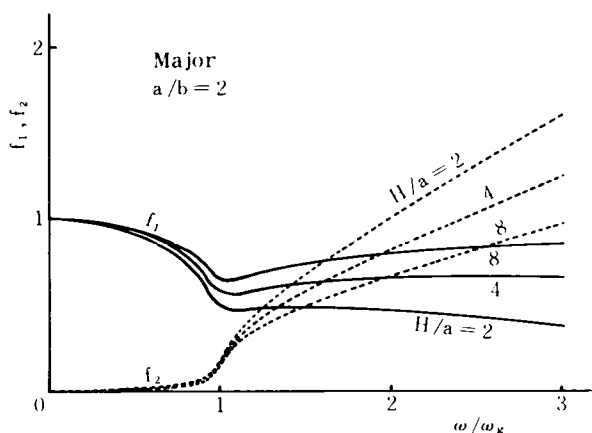


図 2.15 ばね剛性の動的効果

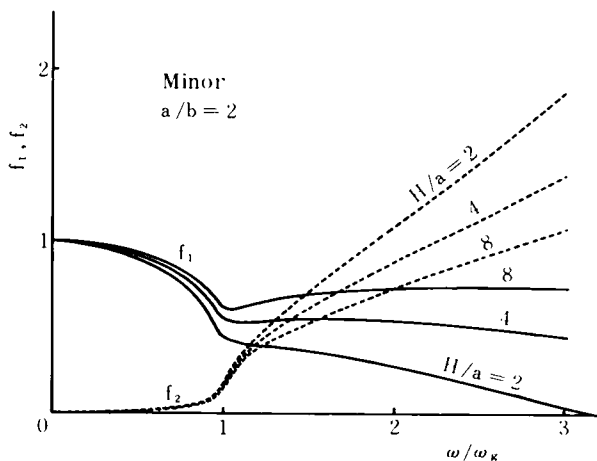


図 2.16 ばね剛性の動的効果



長・短い軸に沿った振動においても、 $H/a$ の増大、すなわち断面形を一定 ( $a/b=2$ ) にしているので、層厚 $H$ を増大させると、実部 $f_1$ は特に $\omega > \omega_g$ ではその動的効果は増大し、徐々に静的な値 ( $f_1 = 1.0$ ) に近づいていく。これは、表層地盤の質量作用はほとんど消滅し、ばね作用が卓越してくるので、構造物の共振点は見かけ上増大することを意味する。虚部 $f_2$ については、層厚 $H$ の増大とともにその動的効果は逆に減少している。したがって、表層のばね作用の位相遅れ $\tan^{-1}(f_2/f_1)$ は、層厚 $H$ の小なるほど、すなわち構造物の根入れの浅いほど著しくなることを示している。また層厚が大、あるいは根入れが深いような系にあっては、 $f_1$ が1.0に近づき表層地盤のばね作用は振動の方向に依存しなくなる傾向があるといえよう。

次に、表層地盤よりの地震力の動的効果 ( $g_1 + ig_2$ ) についての計算例を図示したのが、図 2.17 ～ 図 2.20 である。この地震力というのは、表層地盤内を伝播してきた応力波動が、構造物表面で散乱されるときに生ずる反発力のことである。図 2.17 での長軸方向の振動においては、その動的効果 $g_1$  および $g_2$  ともに、断面が偏平なほど若干小さく、図 2.18 の短軸方向の振動では若干大きいようであるが、それらの差はそれほど顕著ではない。したがって、式 (2.58) から分るように地震力の差は $\chi(g_1 + ig_2)$ の大小として評価されるので、層厚 $H$ が一定であるときは、ほとんど静的水平反力と回転反力との比 $\chi$ の大小で決まる。また $g_1, g_2$  おおのの周波数曲線は互にほぼ相似であるとともに、その特性は単純な1自由度系の周波数応答曲線ときわめてよく類似しており、 $\omega/\omega_g = 3$  での表層地盤のせん断2次モードの影響は全く無視しうるのは著しい特徴であろう。これら $g_1, g_2$ の周波数特性曲線において、実部 $g_1$ は $\omega = \omega_g$ を過ぎるとその符号が急変するために、虚部 $g_2$ とのかねあいにより、地震力は表層の共振点を境にして、位相遅れが急に進み、その作用方向は入力に対して逆向きになる。しかしながら、地震力の符号が反転しても、構造物の応答もそれに従うということではない。すなわち、式 (2.58) の分子第1項の構造物の慣性力の項が存在するため、これと地震力とのエネルギー比の大小によって応答が左右されることが知られる。

図 2.19 および図 2.20 は断面形を一定としたときの、地震力の動的効果の表層厚あるいは根入れ長に対する依存度を図示したものである。この場合は、いずれの方向の振動においても、実部 $g_1$  および虚部 $g_2$ とも層厚 $H$ の増大とともに、その動的効果は増すことが分る。このように表層地盤の構造物に及ぼす地震力というのは、簡単な1自由度系モデルの周波数応答として近似的に等置しうることが分ったが、さらにこれを周波数領域より時間領域への変換等を行なう理論展開を進める上でもきわめて好都合であると言えよう。

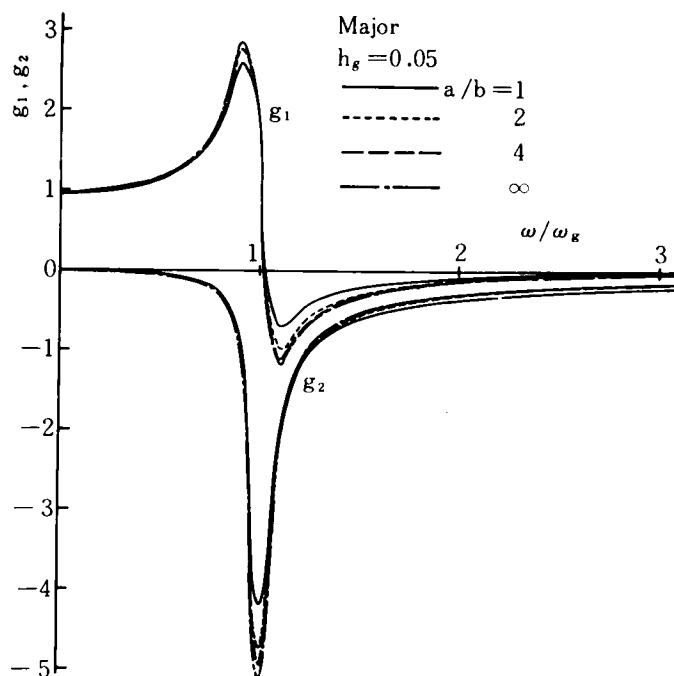


図 2.17 地震力の動的効果

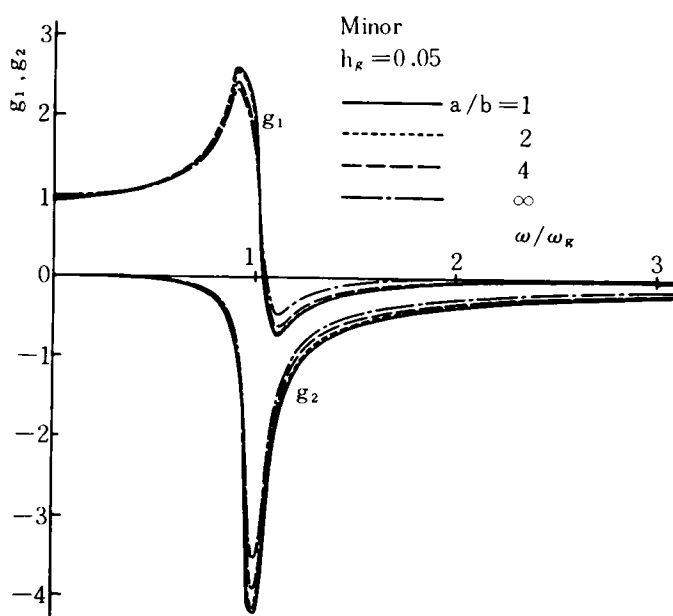


図 2.18 地震力の動的効果

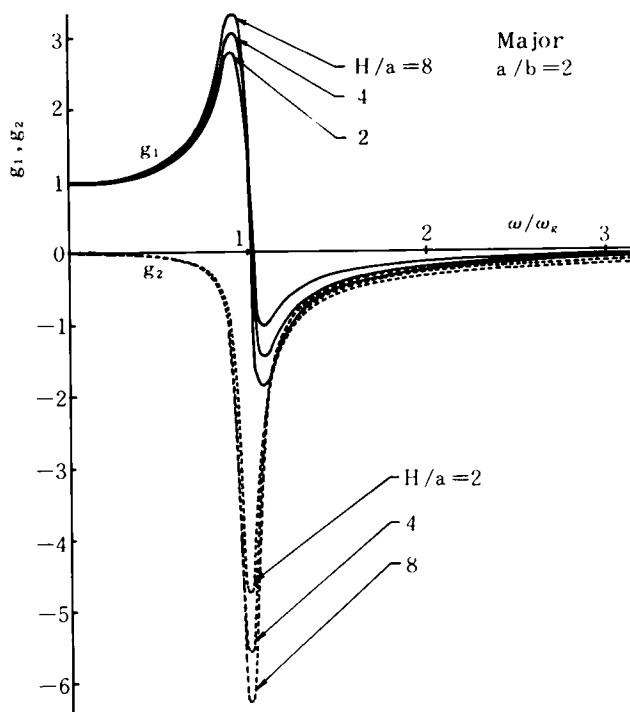


図 2.19 地震力の動的効果

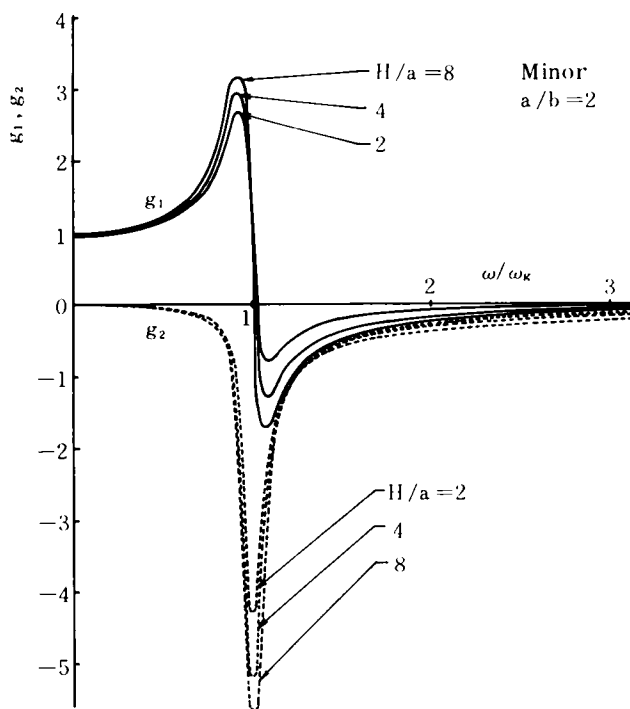


図 2.20 地震力の動的効果

### 2.4.3 基礎構造物の周波数応答倍率

これまでの数値計算例は主として、表層地盤のばね作用と地震力についての、構造物の幾何学的パラメーターの変動に対する検討を行ってきた。ところで式(2.58)において見られたように、構造物の応答はこの表層地盤中の放射・散乱波のもつ周波数特性のみならず、構造物の慣性モーメント  $J$ 、減衰定数  $h_s$ 、固有円振動数  $\omega_s$  等の物理量との連成の結果にほかならず、図 2.21 ～ 図 2.28 に基盤変位に対する構造物頂部の周波数応答倍率の計算例を示した。

図 2.21 および図 2.22 は、表層厚  $H$  を固定したときの断面形状の差異が構造物の応答に与える影響についての図である。図 2.21 の長軸方向の振動においては、偏平断面になるにつれて、式(2.61)で算出される構造物の固有円振動数  $\omega_s$  は増大し、 $b \rightarrow 0$  (板状構造物) の極限では  $\omega_s$  は無限大となる。したがって、断面が偏平になるにつれて、 $\omega_s$  が  $\omega_g$  より高い振動数の方向に遠ざかり、表層の共振 ( $\omega = \omega_g$  による) および構造物の共振 ( $\omega \cong \omega_s$  による) の振幅はともに低下するが、共層の共振振幅はある程度以下になることはなく、断面の長短径比  $a/b$  がさらに大きくなると、 $\omega = \omega_g$  における共振振幅は逆に増大する場合もありうることを示している。これは 2.4.2 で見たように、偏平構造物の  $\omega_s$  が高振動数領域にあるので、逸散減衰の効果を大きく受けるため、 $\omega \cong \omega_s$  での共振は起りにくくなり、一方慣性モーメントがきわめて小さくなるので、 $\omega = \omega_g$  における地震力の共振時の影響を受けやすくなると解釈できよう。それゆえ長軸方向の振動に関する限り、両共振点での応答量を適当な値以下におさえる断面形が存在することになる。

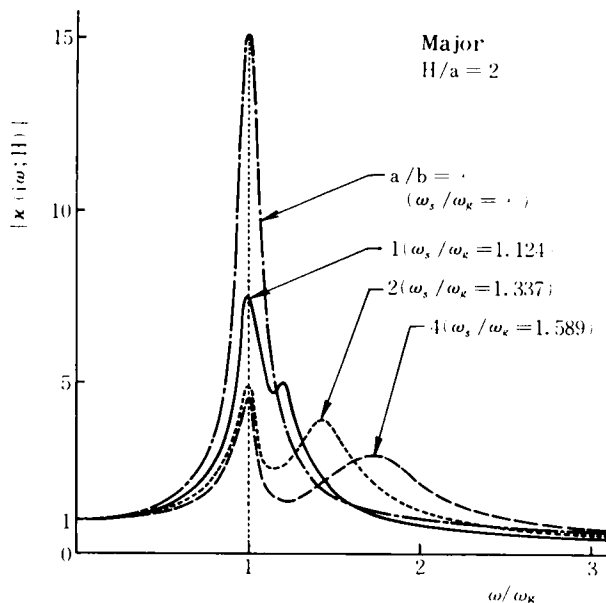


図 2.21 周波数応答倍率

一方、図 2.22 での短軸方向の振動においては、式 (2.60) から分るように、断面が扁平になるにつれて断面 2 次モーメントが急速に低下するため、構造物の固有円振動数  $\omega_s$  は低振動数域へ移行する。したがって、長軸方向の振動の場合とは逆に、 $\omega_s$  が表層のせん断 1 次の固有円振動数  $\omega_g$  より小さな値をとりがちで、長軸方向の振動に比べて非常に大きな共振状態が現出するようである。この場合はすべての  $\omega_s$  が  $\omega_s < \omega_g$  となっているため、逸散減衰効果が共振点付近に及ばず、ただ表層地盤内の粘性減衰効果のみが効いているに過ぎない。これは長軸方向の振動時には、 $\omega \cong \omega_s$  の近辺では地震力の振幅の符号は入力に対して逆転しているため、式 (2.58) の分子の構成からも分るように、慣性力と地震力とが互に相殺し合うため、応答を縮小させる傾向があるのに反し、短軸方向の振動では、 $\omega_s < \omega_g$  となるため、地震力と慣性力とは同位相となり、両者の影響は相乗する結果、応答をより一層増大させる傾向があると言えよう。なお断面の極限状態である板状構造物 ( $b \rightarrow 0$ ) の応答量は、長軸方向の振動におけるそれとほとんど同じであり、このように直圧力  $\sigma_g$  に対する受圧面の差異が相当大きいにもかかわらず、応答量が同程度になることは注目に値する。

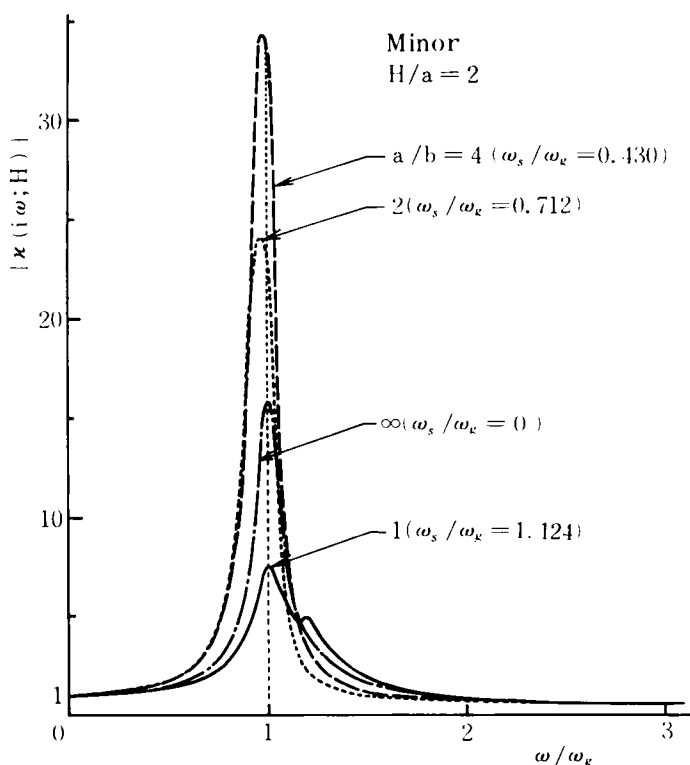


図 2.22 周波数応答倍率

ところで、長短径比  $a/b = 2$  または  $4$  などの場合の振幅の方が、板状構造物のそれより大きくなっている傾向は、長軸方向の振動の場合と全く異なることが示されている。このように、長・短軸長の異なる構造物にあつては、長軸方向の振動では共振時の応答振幅を縮小せしめる耐震上好ましい断面形状であっても、短軸方向の振動においては最悪である場合も存在することを示しており、地中に埋設された基礎構造物の設計上には十分の注意が必要であろう。

図 2.23 および図 2.24 の周波数応答曲線より、表層厚  $H$  が応答倍率に与える影響を知ることができる。

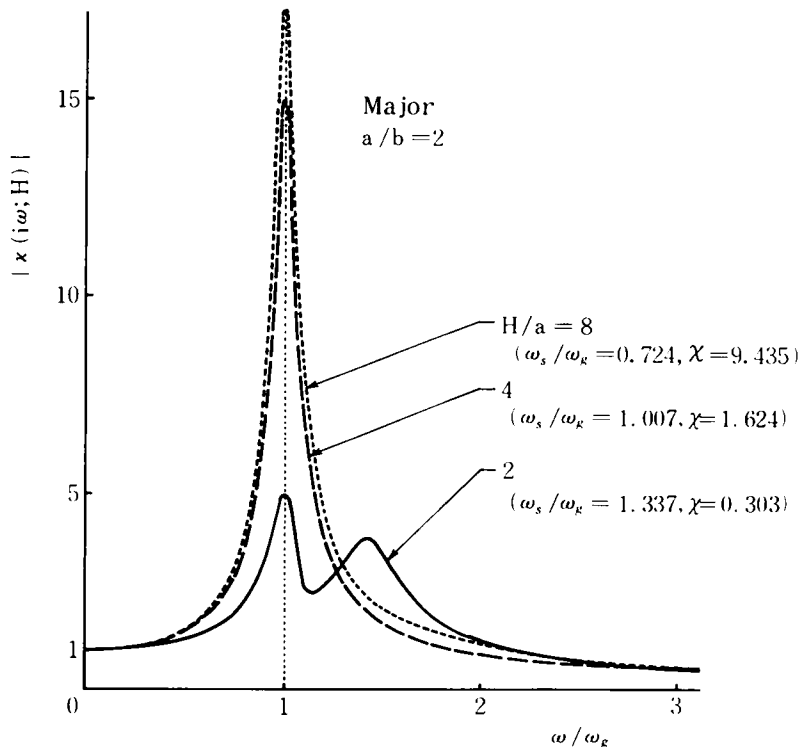


図 2.23 周波数応答倍率

まず図 2.23 の長軸方向の振動においては、層厚あるいは根入れ長  $H$  を増大させると、相対的に断面（長径： $2a$ ）は小さくなり、構造物全体としては細長くなるので、固有円振動数  $\omega_s$  は低下する。したがって、先述の図 2.11 から分るように、静的反力比  $\chi$  は  $H$  の増大とともに急速に増大する。図 2.23 において、 $H/a = 2$  の場合では  $\omega_s > \omega_g$  であるから、逸散減衰の影響を受け、かつ  $\chi$  の値も比較的小さいので、 $\omega = \omega_g$  と  $\omega \cong \omega_s$  による両共振時の振幅は比較的小さいが、 $H/a = 4$  あるいは  $8$  の場合になると  $\omega_s$  は減少して、 $\omega_s \leq \omega_g$  となるため逸散減衰の影響を受けず、かつ  $\chi$  が急速に増大するために、表層地盤の共振時  $\omega = \omega_g$  の影響が大き

く効き、共振振幅はきわめて大きくなる。この図において、 $H/a=4$  では  $\omega_s \cong \omega_g$  であるにもかかわらず、 $H/a=8$  ( $\omega_s < \omega_g$ ) の場合の共振振幅の方が大きくなるのは、地震力の動的効果は大差ないので、静的反力比  $\chi$  の値に相当の差があるためと言えよう。

図 2.24 の短軸方向の振動においては、 $H/a$  のいずれの値に対しても  $\omega_s < \omega_g$  となるため、その共振振幅は大きい、特に  $H/a=8$  の場合では、静的反力比  $\chi$  の値はきわめて大きいにもかかわらず、 $\omega_s$  が  $\omega_g$  に比してかなり小さいために、両共振点の相乗効果がそれほど効かなくなり、 $H/a=4$  の場合のように、 $\chi$  の値はそれほど大きくはなくても、 $\omega_s$  が  $\omega_g$  に近い方が共振振幅は大きくなることありうることを示している。

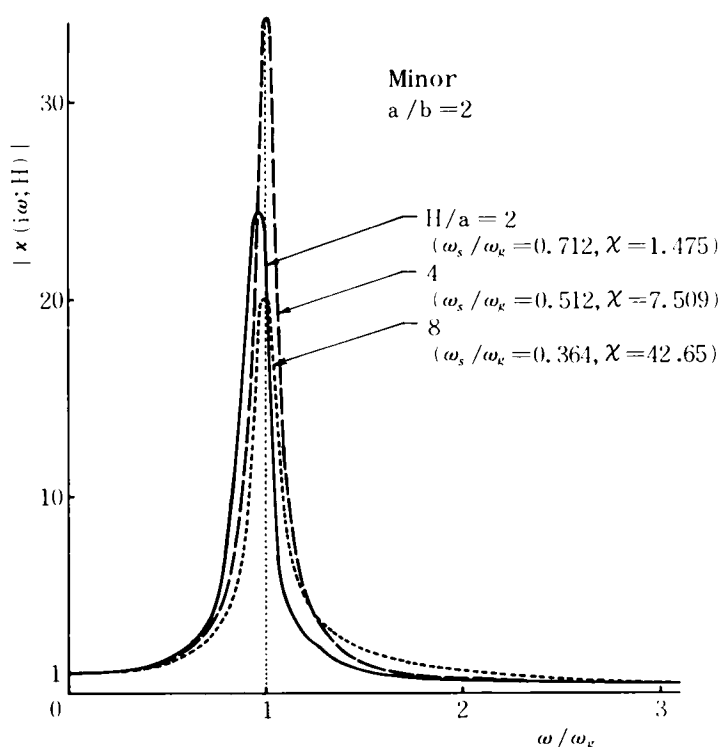


図 2.24 周波数応答倍率

ところで本解析においては、表層地盤が共振時 ( $\omega = \omega_g$ ) においてその振幅を有限値たらしめるために、鉛直平面内におけるせん断変形の速度に比例する減衰 (粘性減衰) を導入したが、この粘性減衰定数  $h_g$  の大小による応答倍率の影響について図示したのが、図 2.25、図 2.26 である。当然のことながら、 $h_g$  の増加とともに表層地盤の共振振幅は急速に減少するが、図 2.25 の長軸方向の振動において観察されるように、構造物の共振点  $\omega \cong \omega_s$  では振幅はわずかながら逆に増大するという傾向があるようである。

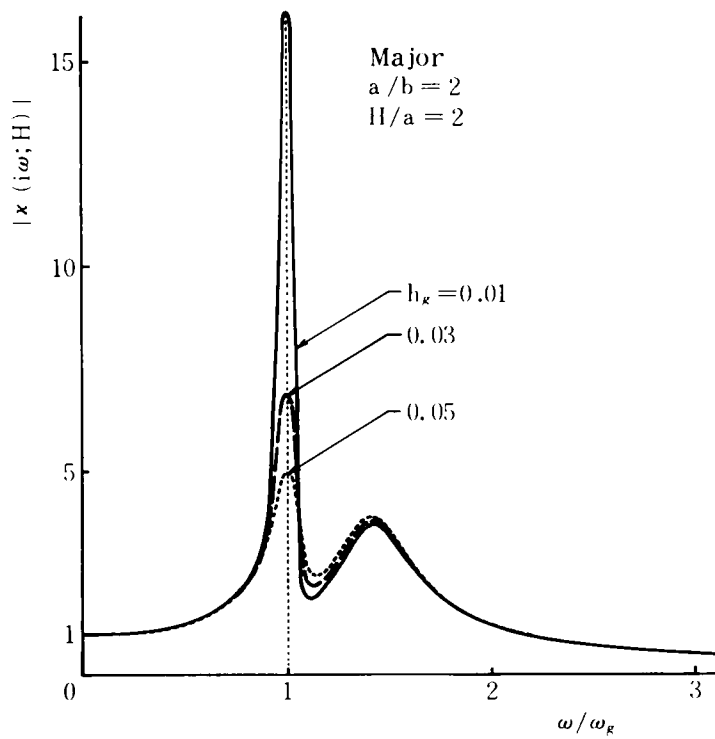


图 2.25 周波数应答倍率

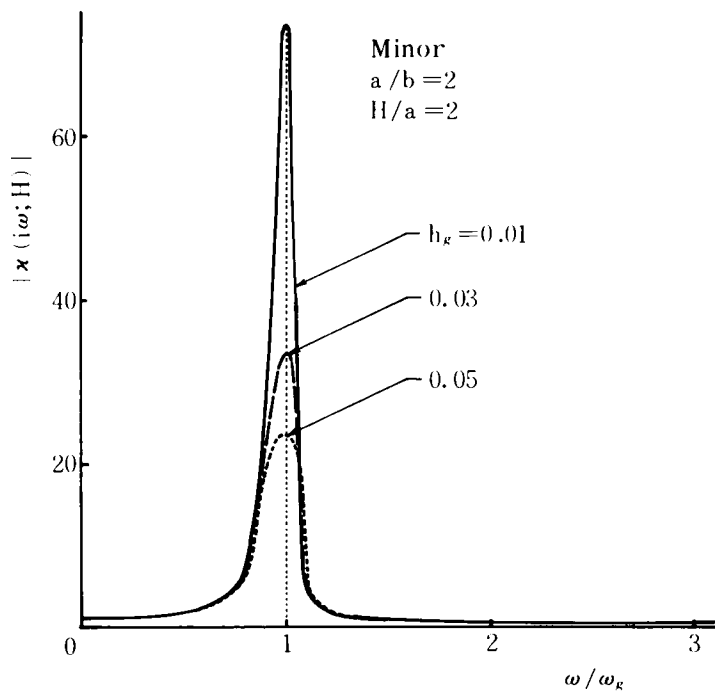


图 2.26 周波数应答倍率



図 2.27 および図 2.28 は、式 (2.60) および式 (2.61) における  $c_1$ 、したがって静的水平反力と静的底面反力との比  $\chi$  の変化に対する、構造物の周波数応答倍率の影響を示したものである。この反力比  $\chi$  の大小は、構造物の形状が不変であるときは、基盤に対する表層地盤の硬軟度を意味することは言うまでもない。図 2.27 の長軸方向の振動では、反力比  $\chi$  の大きい場合は、表層の共振 ( $\omega = \omega_g$  による) が大きく現われるが、構造物の共振 ( $\omega \cong \omega_s$  による) 振幅は逆に減少し、見かけの構造物の共振振動数は増大する。逆に  $\chi$  が小さく、すなわち表層地盤が支持層である基盤に比して軟かい場合は、表層地盤の共振の影響は薄れ、構造物の共振点での振幅が増大する。

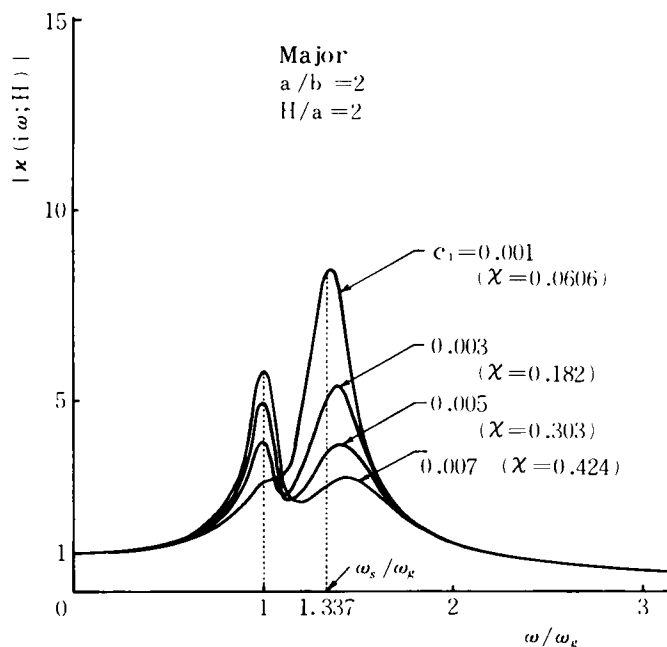


図 2.27 周波数応答倍率

一方、図 2.28 の短軸方向の振動においては、長短径比  $a/b=2$  の断面の場合についての例であって、式 (2.60) より  $\omega_s/\omega_g = 0.712$  と算出される。ところで、反力比  $\chi$  が小 ( $c_1$  が小)、すなわち表層地盤が基盤に比べて相対的に軟いときは、構造物の固有円振動数  $\omega = \omega_s$  付近で比較的小さな共振状態が存在し、 $\omega = \omega_g$  での共振の影響はきわめて小さく無視しうるほどであるが、反力比  $\chi$  が増大するとともに  $\omega \cong \omega_s$ 、 $\omega = \omega_g$  による両共振は相乗的に重なり合い、単一の大きな共振点を形成する。その単一共振点の位置は、 $\chi$  の増加とともに、表層地盤の共振点  $\omega = \omega_g$  に接近しながら、共振振幅は増大していくことが分る。しかるに  $c_1 = 0.005$  ( $\chi = 1.529$ ) の場合のように、静的反力比  $\chi$  の増加傾向と応答振幅の傾向が対応しない場合も存

在するようであり、必ずしも静的な反力比  $\chi$  のみで動的現象は説明できないようである。しかしながら、短軸方向の振動においては、全般的には  $\chi$  の値が小、すなわち基盤に比べて表層がかなり軟い場合は、構造物の共振振幅を比較的小さくおさえられると言えよう。

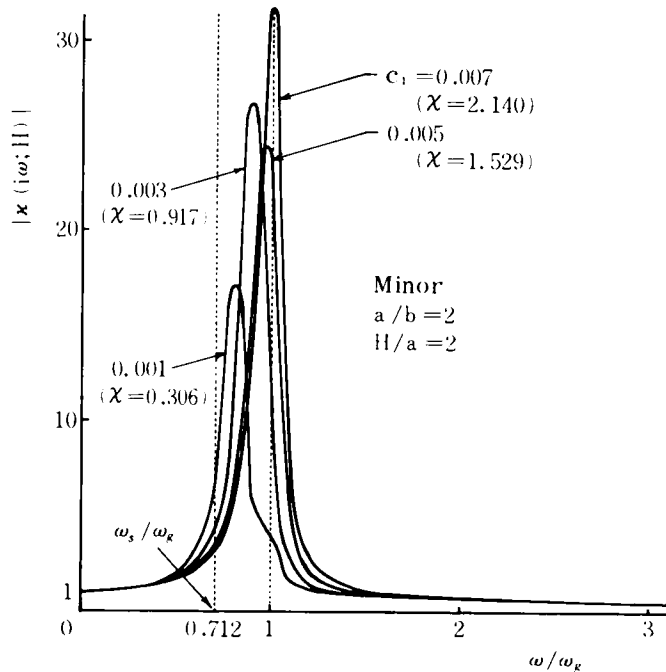


図 2.28 周波数応答倍率

## 2.5 結 言

本章における解析によって、埋設構造物の断面が円形でない場合は、構造物の表面で散乱される波動や構造物の運動に伴って発生する放射波が、振動の方向により全く異なった挙動をすることを確かめることができた。また構造物の振動にとって周辺地盤が、増幅作用をするのかあるいは制御作用をするのか、という従来より基礎動力学ないし耐震基礎工学の分野で問題とされてきた点についても若干言及することができた。かくして、本章において表層地盤とその中に埋設された剛な楕円断面基礎構造物の動揺振動に関して解析検討して収めた成果を要約すれば、以下ようになる。

- 1) 偏平な断面をもつ構造物ほど、その断面の最急曲率点における地盤の応力集中が著しく、構造物に作用する地震力は大きい。

- 2) 構造物の側面で散乱・放射される応力波の振幅は、周辺地盤への伝播距離とともに単調に減少する傾向にある。
- 3) 入力振動数が地盤のせん断 1 次の固有振動数より小さい範囲では、振動の方向および断面形状差によらず、オーダー的に大差ない程度の表層地盤のばね剛性効果と質量効果が共存する。入力振動数がそれより大きくなると、断面が偏平になるほど長軸方向の振動においてはばね剛性効果が卓越し、短軸方向の振動において質量効果が卓越し、ばね作用が負の剛性を持ちやすい。
- 4) 入力振動数が、表層のせん断 1 次の固有振動数より大きい領域では、逸散減衰作用が生じ、その等価減衰定数は、静的水平反力と回転反力との比および構造物と表層 1 次の固有振動数比との積に比例し、各れの方法の振動においても偏平な構造物ほど大きく換算される。
- 5) 表層地盤の構造物に及ぼす地震力の動的効果は、構造物の断面形状や振動の方向にあまり関係なく、表層地盤の基本振動数を固有振動数とする 1 自由度系の周波数応答特性で近似的に等置しうる。
- 6) 振動方向によらず、構造物の固有振動数を表層地盤の 1 次のそれより、できる限り遠ざけるために、偏平な断面を選んでも、地中構造物の応答振幅は必ずしも減少せず、むしろ増大することさえありうるので、あまりにも偏平な断面は耐震工学上有利であるとは言い難い。
- 7) 表層地盤が軟いほど、長軸方向の振動においては、構造物の固有振動数に対応する共振振幅は増大するとともに、表層地盤の共振の影響は小さくなるが、短軸方向の振動においては、両共振状態は結合して単一の共振状態になり、その共振振幅も増大する。

以上が本章における結論であるが、構造物が地中に埋設されている場合は、その動特性の解明にはかなり複雑な過程を経なければならないが、これより得られる結果は比較的簡単な力学モデルに近似的に置換して取扱いうる見通しを得た。実際の地震動およびその応答のように複雑な現象の解析においては、このような地盤の簡略化の見通しが付けられたことは、地盤特性を失なうことなく理論展開を容易ならしめるものと期待される。

### 第 3 章 均質地盤中にある剛基礎構造物の不規則地震応答

#### 3.1 概 説

地表面付近で観測される地震動は、一般にその波形は不規則であり、個々の地震動を予測することは困難であるが、同じ震源より来襲する地震動でも観測場所が異なればその得られる波形も異なるものである。このように、地震動を時間的にも場所的にも確定的に捕えることは極めて困難であるが、過去の記録を系統的に整理してみると、統計的に一定の傾向が見出されることが多く、ここに地震動を確率統計的に処理しうる根拠があるものと思われる。したがって、地震動の振幅は空間的に一定の確率分布を有することになるが、一方個々の地震動について見ると、その短い経過時間内の振幅は同様に不規則に振動していて、その時間上の統計的性質は、地震の規模・伝播距離・地盤の種類等によって著しく異なることが多い。また標本としての個々の地震動は、その継続時間が短いために、統計的処理が容易でないこともあるが、実際の数理的取扱いにおいては、振幅の時間変動を定常確率過程として表わし、地震動の時間的消長現象である非定常性を表わすために、上記定常確率過程に確定的な形状関数を乗じて地震動の強度に変化をもたせ、非定常確率過程を表わす手法が一般に行なわれつつある<sup>1),2),3)</sup>

さて、地震動の時間的、空間的な表現は上記のようになされるとすると、これらが構造物に作用するときの不規則応答を論ずるには、線形振動である限り、これら入出力に確定的な対応がついていなければならない。このことは、地震動（入力）と応答を結びつける線形要素が周波数応答関数あるいは単位衝撃応答関数と呼ばれるものを持つことを要求するわけである。現在まで不規則振動論において論じられてきた多くの問題では、ほとんどの場合この単位衝撃応答関数は暗黙のうちに存在するものとされてきた。これは対象とする系が簡単な 1 質点系あるいはこれの組合わされた多質点系であるため、その存在が自明とされてきたことによるものであろう。

ところで土木・建築構造物のように、これらは地表面のほかは地中にも構築されるわけであるから、振動中は構造物と周辺地盤との相互作用によって地震動が調和波であつても、構造物の周波数応答は複雑であることは、第 2 章の解析例を見ても明らかであろう。しかるに単位衝撃応答関数と周波数応答関数は互に Fourier 変換によって結ばれているが、上述のように地盤と構造物からなる系の周波数応答関数は周波数に関して複雑な関数となっているため、これの Fourier 逆変換によって単位衝撃応答関数を得ることは容易ではない。このように複雑である

原因は、もちろん構造物表面より放射される波動が無限遠に逸散することから生ずる減衰効果のみならず、周辺地盤のばね効果や質量効果が周波数の複雑な関数になっていることに他ならない。そこで本章では、第2章のような均質な地中に埋設された構造物の不規則振動について論ずるため、地盤の地震力およびばね作用の内容をできるだけ保持するような、周波数に關してある単純化を行ない、地中構造物の近似的な単位衝撃応答関数を解析的に導き出した。かくして得られた単位衝撃応答関数により、この系の応答を解析的に表現しうが、入力はず定常確率過程として、ホワイトノイズとしたときの構造物の過渡応答について、つぎに入力を非定常確率過程として、1個の卓越振動数を持つようなスペクトル構造の定常確率過程に確定関数を乗じた地震動に対する、構造物の非定常応答について種々の応答確率量を導き検討を加えた。

ところで、これらの応答に関する確率量そのものの大小で構造物の破壊等の事象を量的に説明するには不便であり、多くの分野の人々によりこの評価方法が考案されてきている<sup>4,5,6)</sup>そこで、本研究でもこれらの若干の評価方法によって地中構造物の確率統計的性向について論及した。

### 3.2 動揺振動の単位衝撃応答関数

ある振動系が時刻  $t$  において外力  $f(t)$  を受けるとき、その運動方程式は一般に次の形に書き表わされる。

$$A(\ddot{x}, \dot{x}, x; t) = f(t) \quad \cdots \cdots \cdots (3.1)$$

ここに、上式左辺の  $A(\ddot{x}, \dot{x}, x; t)$  は慣性力および線形反力の釣合方程式を一括表示したものである。このとき、この系の単位衝撃応答関数  $w(t)$  が得られたとすると、式(3.1)の一般解は、

$$x(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad \cdots \cdots \cdots (3.2)$$

と書き表わされることは明らかである。

そこで、式(3.2)の両辺をFourier変換すると、

$$X(i\omega) = W(i\omega) \cdot F(i\omega) \quad \cdots \cdots \cdots (3.3)$$

という関係が容易に得られる。すなわち、応答のFourier変換形は外力のFourier変換形に系

の周波数応答関数を乗じたものである。ただし、 $X(i\omega)$ および $F(i\omega)$ はそれぞれ応答 $x(t)$ および外力 $f(t)$ の Fourier 変換形、 $W(i\omega)$ は系の周波数応答関数と呼ばれるものであって単位衝撃応答関数 $w(t)$ とは次式のように、Fourier 変換で結ばれている。

$$W(i\omega) = \int_0^{\infty} w(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

さらにまた、式(3.4)を Fourier 逆変換を行なうことにより

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

という関係が得られる。このように何らかの方法で周波数応答関数 $W(i\omega)$ が得られれば、その Fourier 逆変換により、系の単位衝撃応答関数を知ることができるわけである。したがって、もし外力 $f(t)$ が調和力 $f_0 e^{i\omega t}$  ( $f_0$ : 実数) となるときは、応答 $x(t)$ は式(3.2)より

$$x(t) = W(i\omega) \cdot f_0 e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

という調和振動になることは明らかである。

ところで、本章で対象とする系は、第2章の楕円断面の地中構造物であって、この系の動揺振動に関する周波数応答関数 $\varphi_0(i\omega)$ は、第2章の式(2.55)より次式で与えられる。

$$\varphi_0(i\omega) = \frac{\frac{H_G}{i_0^2} \left(\frac{\omega_g}{\omega_s}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \frac{1}{H} \chi G(i\omega)}{1 + 2i\zeta_s \frac{\omega}{\omega_s} - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 + \chi F(i\omega)} \cdot A_0 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= \sqrt{\frac{J}{m_0}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k_R}{J}}, \quad m_0 = \rho_s \pi a b H, \quad \frac{c_s}{J} = 2 \zeta_s \omega_s, \\ J &= \begin{cases} \rho_s \pi a b H_s \left( \frac{a^2}{4} + \frac{H_s^2}{3} \right) & : \text{長軸方向} \\ \rho_s \pi a b H_s \left( \frac{b^2}{4} + \frac{H_s^2}{3} \right) & : \text{短軸方向} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

の関係があり、 $m_0$ : 構造物の全質量、 $\rho_s$ : 構造物の換算質量、 $J$ : 回転軸まわりの慣性モーメント、 $k_R$ : 静的回転ばね剛性、 $c_s, \zeta_s$ : 動揺振動の減衰係数、同減衰定数、 $\omega_s, \omega_g$ : 構造物の動揺振動固有円振動数および表層地盤のせん断1次固有円振動数である。また一方、 $F(i\omega)$ および $G(i\omega)$ はそれぞれ表層地盤の動的ばね効果および表層地盤よりの地震力の動的効果であって、

一般に

$$\left. \begin{aligned} F(i\omega) &= f_1 + if_2, \quad (f_1, f_2: \text{実数}) \\ G(i\omega) &= g_1 + ig_2, \quad (g_1, g_2: \text{実数}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.9)$$

という複素表示で与えられる。

それゆえ、図3.1のように構造物頂部の水平変位（相対変位）を  $x(t)$  とし、そのFourier変換形を  $X(i\omega)$  とすると、この系の頂部水平振動における周波数応答関数  $W(i\omega)$  は式(3.7)より次式で与えられることになる。

$$W(i\omega) = \frac{\frac{H_G H_s}{i_0^2} + \frac{\pi}{2} \frac{H_s}{H} \left(\frac{\omega_s}{\omega_g}\right)^2 X G(i\omega)}{-\omega^2 + 2i\zeta_s \omega_s \omega + \omega_s^2 + \omega_s^2 X F(i\omega)} \dots\dots\dots (3.10)$$

したがってこの周波数応答関数  $W(i\omega)$  を式(3.5)に持込んで Fourier 逆変換を行なえば、表層地盤との相互作用を考慮した構造物の単位衝撃応答関数  $w(t)$  が得られる。しかるに、実際は第2章で解析されているように  $W(i\omega)$  の分母、分子にある  $F(i\omega)$  および  $G(i\omega)$  が周波数  $\omega$  の複雑な関数となっており、このままでは  $w(t)$  の解析表示を得ることはきわめて困難である。

そこで、これら  $F(i\omega)$  および  $G(i\omega)$  を周波数に関して何らかの近似化が考えられねばならないが、これら  $F(i\omega)$  および  $G(i\omega)$  が動特性を示すものであるから、その特性をできるだけ保持す

るような方法でなくてはならない。それゆえ、本章では第2章の解析結果をできるだけ忠実に取込むように、以下のような式の置換えを行なった。

まず、式(3.9)において  $F(i\omega) = f_1 + if_2$  の実部  $f_1$  は表層地盤のばね効果であり、この実部にはばね剛性の効果（実数部分）および質量効果（ $-\omega^2$ に比例部分）が共存するものとし、一

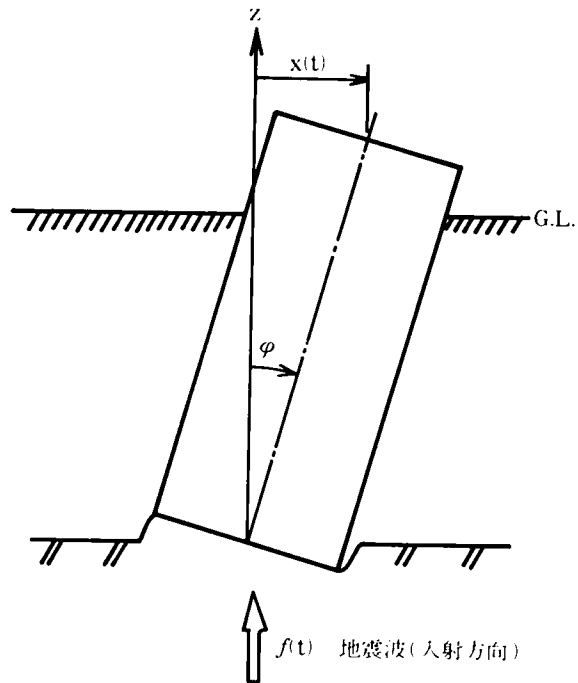


図 3.1 動揺振動モデル

方虚部  $f_2$  は逸散減衰による制振作用を示すものであるが、ここでは周波数の正の全領域 ( $\omega \geq 0$ ) で振動数に 1 次比例する。すなわち粘性減衰作用に等置しうるものと仮定する。したがってこのような仮定に従うと、 $F(i\omega)$  は

$$F(i\omega) = f_1 + if_2 = 1 - \frac{1}{k_1^2} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + 2ik_2 \frac{\omega}{\omega_g} \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

という関数形が与えられる。ただし、実部  $f_1$  および虚部  $f_2$  は図 3.2 のように与えられるもので、

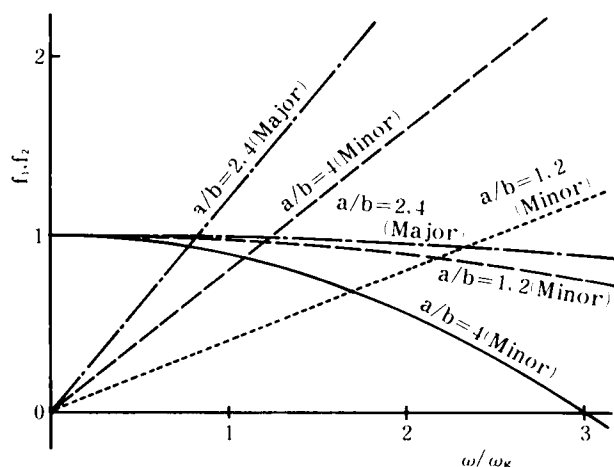


図 3.2 ばね作用の動的効果の近似曲線

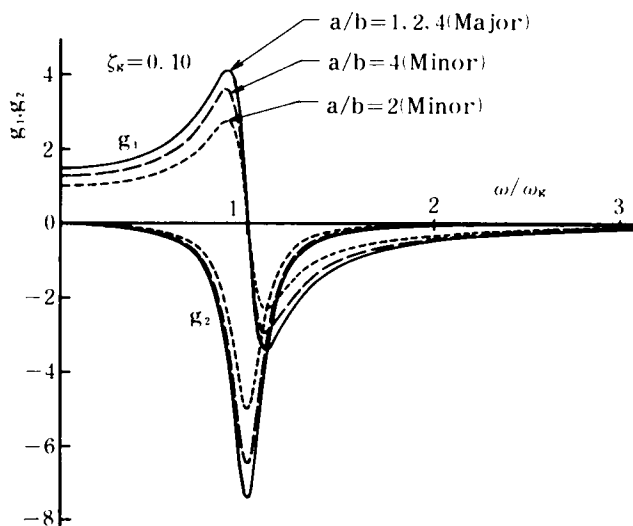


図 3.3 地震力の動的効果の近似曲線



$k_1$ は $\omega$ の2次曲線 $f_1$ が横軸(振動数軸)と交わるときの $\omega/\omega_g$ の値であり、 $k_2$ は直線 $f_2$ の勾配の半分の値である。ただし、図中にMajorおよびMinorと記してあるのは、それぞれ楕円断面地中構造物の長軸方向および短軸方向への振動を表わすものであり、以後もこの約束に従うものとする。

一方、表層よりの地震力の動的効果 $G(i\omega)$ は図3.3のように、固有円振動数 $\omega_g$ を持つ1自由度系の応答特性に近似させたものである。したがって $G(i\omega)$ としては次の関数形が与えられる。

$$G(i\omega) = g_1 + i g_2 = \frac{k_3 \omega_g^2}{-\omega^2 + 2i\zeta_g \omega_g \omega + \omega_g^2} \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

ここに、 $k_3$ は上記近似式の補正係数である。

かくして、 $F(i\omega)$  および  $G(i\omega)$  が式(3.11)および式(3.12)のように定められると、これらを式(3.10)に持込むと、周波数応答関数 $W(i\omega)$ は次式のように変形される。

$$\begin{aligned} W(i\omega) &= W_1(i\omega) + W_2(i\omega) \\ &= \frac{\alpha'}{-\omega^2 + 2i\Delta_1\omega + \frac{(1+\chi)}{\mu_0}\omega_s^2} \\ &\quad + \frac{\beta'}{\left\{-\omega^2 + 2i\Delta_1\omega + \frac{(1+\chi)}{\mu_0}\omega_s^2\right\}(-\omega^2 + 2i\Delta_2\omega + \omega_g^2)} \quad \dots\dots\dots (3.13) \end{aligned}$$

ただし、 $W_1(i\omega)$ および $W_2(i\omega)$ は係数 $\alpha'$ および $\beta'$ を含む項の周波数応答関数であり、前者は表層地盤のばね効果のみが関係し、後者はばね効果と地震力の効果とが結合した項を示している。さらに各種記号は以下のように置き換えがなされている。

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{k_1 \alpha}{\mu_0}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\mu_0}, \quad \alpha = \frac{H_G H_s}{i_0^2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} \chi \left(\frac{\omega_s}{\omega_g}\right)^2, \\ \mu_0 &= 1 + \frac{\chi}{k_1^2} \left(\frac{\omega_s}{\omega_g}\right)^2, \quad h_e = \zeta_s + \frac{\chi k_2 \omega_s}{\omega_g}, \quad \Delta_1 = \frac{h_e \omega_s}{\mu_0}, \quad \Delta_2 = \zeta_g \omega_g \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

ところで、通常の表層地盤の粘性減衰定数 $\zeta_g$ は1以下の数を考えればよからうから、結局式

(3.13)を式(3.5)に持込んで積分を実行するに当って、表層と基盤との静的反力比 $\chi$ の如何によって次の2つの場合に分けられる。すなわち

i)  $\mu_0(1-\chi) - h_e^2 \geq 0$  のとき:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{W_1(i\omega) + W_2(i\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

ところで、上式の $W_1(i\omega)$ は複素平面の上半面に極を2個持つが、 $W_2(i\omega)$ は上半面に極を4個持つので、式全体は通常の減衰自由振動に相当することがわかる。それゆえ図3.4(a)のよう

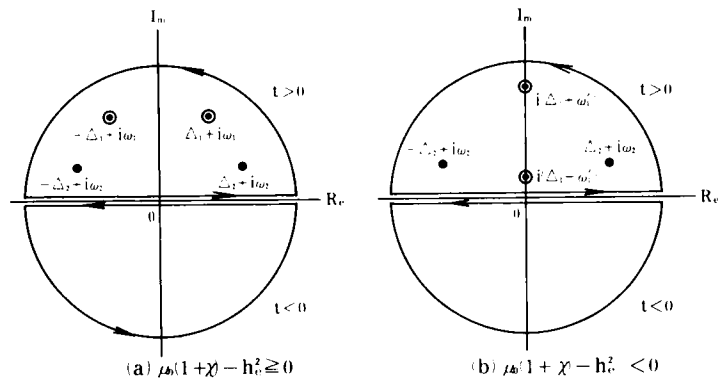


図 3.4 複素平面における積分路と極との関係

に  $t \geq 0$  では上半面の積分路を、 $t < 0$  では下半面の積分路を選ぶことにより、単位衝撃応答関数  $w(t)$ として以下の表現をうる。

$$\begin{aligned} w(t) &= u_1(t) - u_2(t) \\ &= \frac{\alpha'}{\omega_1} e^{-\Delta_1 t} \sin \omega_1 t - \frac{\beta' c_1}{\omega_1} e^{-\Delta_1 t} \sin(\omega_1 t - \delta_1) - \frac{\beta' c_1}{\omega_2} e^{-\Delta_2 t} \sin(\omega_2 t - \delta_2), \\ &= 0, \quad (t < 0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

このとき、 $u_1(t)$ および $u_2(t)$ は前出の部分周波数応答関数 $W_1(i\omega)$ および $W_2(i\omega)$ の Fourier 逆変換形を示すものであり、それぞれ係数 $\alpha'$ および $\beta'$ を含む項が対応する。またその他の記号は次の置き換えがなされている。

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\omega_g^2}{\left\{ (\Delta_1 - \Delta_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \right\} \left\{ (\Delta_1 - \Delta_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \right\}}^{1/2}, \\
\delta_1 &= \tan^{-1} \left\{ \frac{2\omega_1(\Delta_2 - \Delta_1)}{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2} \right\}, \quad \delta_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\omega_2(\Delta_2 - \Delta_1)}{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}, \\
\omega_1 &= \omega_s \sqrt{\frac{1-\chi}{\mu_0} - \left(\frac{h_e}{\mu_0}\right)^2}, \quad \omega_2 = \zeta_g^* \omega_g, \quad \zeta_g^* = \sqrt{1 - \zeta_g^2}
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

このように、 $t < 0$  で  $w(t) = 0$  および  $w(0) = 0$  となることは、単位衝撃応答関数の物理的条件を十分満足するものであることが知られる。

ii)  $\mu_0(1-\chi) - h_e^2 < 0$  のとき： この場合は逸散減衰効果が大きいので、単位衝撃応答関数を構成する要素の一部に過減衰の状態が生じているのであり、式(3.15)の複素平面での極は図3.4(b)のようになり、積分路は i) の場合と同様にとれば、結局次式をうる。

$$\begin{aligned}
w(t) &= w'_1(t) + w'_2(t) \\
&= \frac{\alpha'}{\omega'_1} e^{-\Delta_1 t} \sinh \omega'_1 t + \frac{\beta' c_2}{\omega_2} e^{-\Delta_2 t} \sin(\omega_2 t - \delta'_1), \quad (t \geq 0) \\
&= 0, \quad (t < 0)
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

ただし、 $w'_1(t)$  および  $w'_2(t)$  はそれぞれ係数  $\alpha'$  および  $\beta'$  を含む項、すなわち部分周波数応答関数  $W'_1(i\omega)$  および  $W'_2(i\omega)$  の Fourier 逆変換形である。さらにこの場合も次の置き換えがなされている。

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{\omega_g^2}{\left\{ (\Delta_1 - \Delta_2 - \omega'_1)^2 - \omega_2^2 \right\} \left\{ (\Delta_1 - \Delta_2 + \omega'_1)^2 - \omega_2^2 \right\}}^{1/2}, \\
\delta'_1 &= \tan^{-1} \left\{ \frac{2\omega_2(\Delta_1 - \Delta_2)}{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 - \omega_1'^2 - \omega_2^2} \right\}, \quad \omega'_1 = \omega_s \sqrt{\left(\frac{h_e}{\mu_0}\right)^2 - \frac{1+\chi}{\mu_0}}
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

式(3.18)の第1項はばね効果が過減衰の状態を示しているが、表層の地震力の効果が過減衰になっていないので ( $\zeta_g < 1$ )、両者の共存する第2項目は依然減衰自由振動をなすことにな

る。

このようにして得られた系の単位衝撃応答関数  $w(t)$  を確定させるために、これに含まれる、表層と基盤の静的反力比  $\chi$ 、定数  $k_1, k_2$ 、および補正係数  $k_3, k_4$  等を第2章の周波数応答解析の傾向に合うように決めねばならない。それによると、 $(\chi, k_1, k_2, k_3, k_4)$  は概略表 3.1 のよ

表 3.1 単位衝撃応答関数に必要な諸定数・係数

構造物断面	振動方向	$\chi$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
$a/b = 4$	Minor	4	3	0.4	1.3	1.3
$a/b = 2$	Minor	1	6	0.2	1	1
$a/b = 1$	—	0.2	6	0.2	1.5	1.5
$a/b = 2$	Major	0.2	9	0.6	1.5	1.5
$a/b = 4$	Major	0.3	9	0.6	1.5	1.5

うな値を与えればよいようである。また  $\alpha, \beta$  等の量は楕円断面地中構造物の幾何学形状および表層地盤と基盤の静的反力比  $\chi$  に依存する量であるから、第2章における値を準用している。このとき近似的周波数応答倍率を示したのが図 3.5 であって、第2章の結果と比べると細部に

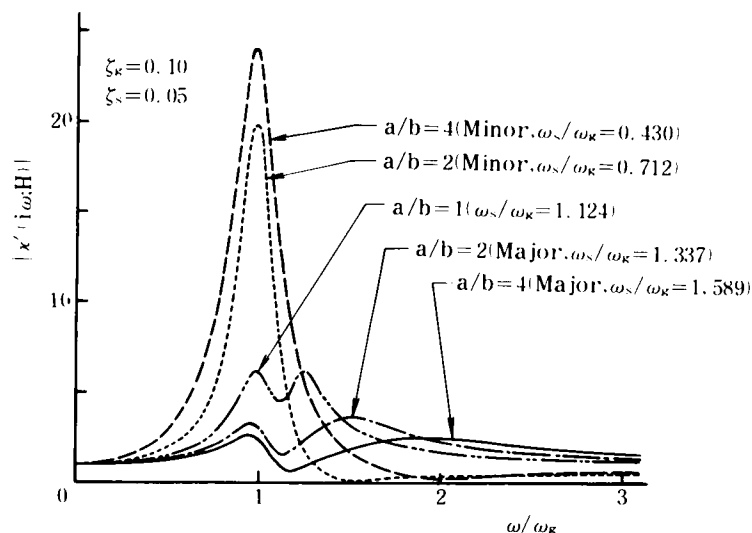


図 3.5 周波数応答倍率の近似曲線

については若干の食い違いもあるが、動的效果の特徴を比較的よく近似し得ているといえよう。この場合の等価粘性減衰定数  $\zeta_g$  は第2章の  $h_g$  と必ずしも同一のものではなくて、 $h_g = 0.05$  に対して  $\zeta_g = 0.10$  くらいが対応しているようである。また動揺振動の減衰定数  $h_s$  と  $\zeta_s$  は同

一のものであって、 $\zeta_s = 0.05$ として用いている。

かくして与えられた定数等を用いたときの、単位衝撃応答関数  $w(t)$  の傾向を図示したのが図 3.6 ～図 3.8 である。図 3.6 の(a), (b) は長短径比  $a/b = 2$  の楕円断面の地中構造物がそれぞれ断面の長軸(Major)および短軸(Minor)方向に動揺振動を行なうとき、等価粘性減衰定数  $\zeta_g$  の差異による単位衝撃応答関数  $w(t)$  の影響を図示したものである。これらのうち(a)は長軸方向の振動の場合であるが、最初のピークが現われるまでの時間  $T/T_g = 0.18$  は、ほぼ構造物の固

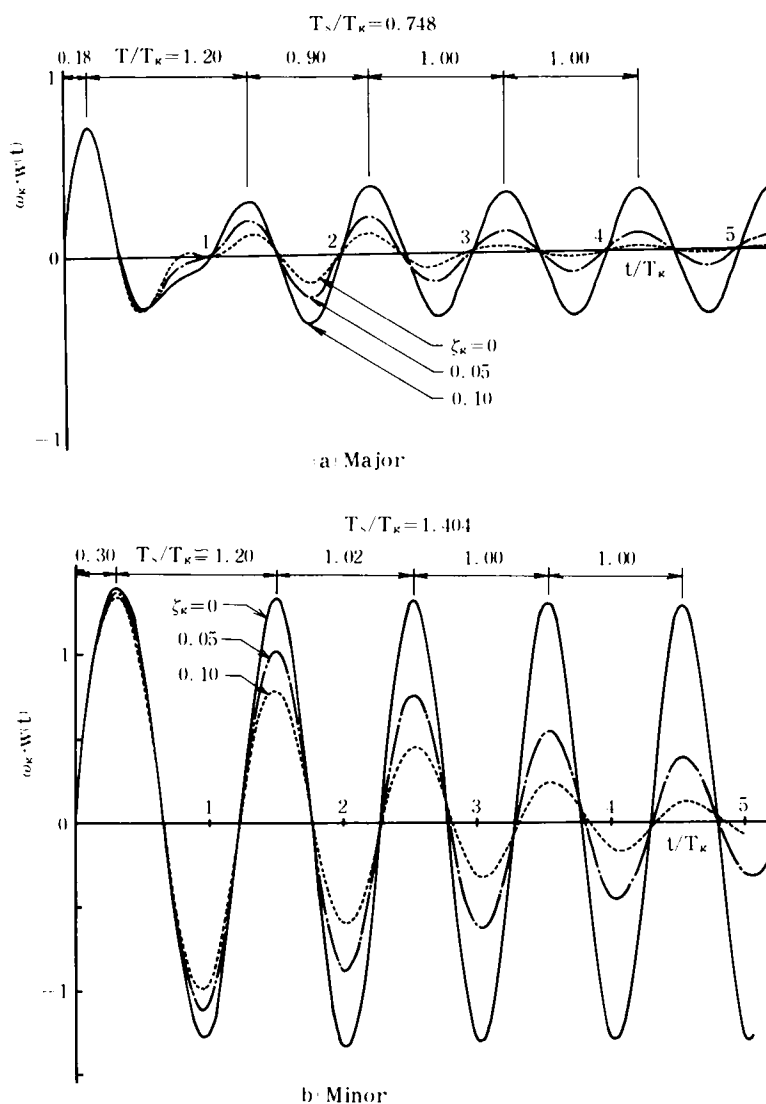


図 3.6 単位衝撃応答関数

有周期の $\frac{1}{4}$ ，すなわち $\frac{1}{4} \cdot T_s / T_g = \frac{1}{4} \cdot \omega_g / \omega_s = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1.337} = 0.186$  ( $T_s$ ：構造物の固有周期， $T_g$ ：表層地盤のせん断 1 次固有周期)と一致しており，次のピークまでの時間は $T / T_g = 1.20$ とかなり長く，この間に波形が正弦的でなく乱れている。これは明らかに，表層地盤と構造物の相互作用の結果に他ならず，このためいったん波形は乱れるとともに振幅はかなり減少するが，以後は $T / T_g \cong 1$ の周期でピークが現われるので，表層地盤の影響のみが卓越することがわかる。またこの波形の最初の立上がりは粘性減衰定数 $\zeta_g$ の大小に関係なく一定値を示すが，以後の経過時間とともに $\zeta_g$ の存在する場合はその振幅は周期的に減少しており，それゆえこの系の応答の過去の履歴は 1 周期前後で急速に失われ，応答履歴がいったん遮断された形になり，したがって入力地震動に対する応答の追従性は敏速となるため，その過渡状態は短時間で終わることを意味しているといえよう。

一方図(b)は $a/b = 2$ の楕円断面構造物が短軸方向に振動する場合の単位衝撃応答関数であるが，最初のピークまでの時間 $T / T_g = 0.30$ は構造物の固有周期の $\frac{1}{4}$ すなわち $\frac{1}{4} \cdot T_s / T_g = \frac{1}{4} \cdot \omega_g / \omega_s = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1.72} = 0.35$ とほぼ一致しており，一見正弦波形的な特徴のため相互作用の影響は見出しにくい，次のピークまでの時間が長いのはやはり(a)と同様な理由によるものである。さらに短軸方向の振動における $w(t)$ の振幅が長軸方向の振動の場合に比べて大きいのは，第 2 章の周波数応答における $\omega \cong \omega_g$ での共振現象と対応しており，この現象と時間領域における過去の履歴が $T \cong T_g$  ( $T_g = 2\pi / \omega_g$ )の周期で加算されることで応答は増大し過渡状態が長びくことが同義であることを示している。このように，最初の 1 周期前後では構造物自身の振動特性が強く現われるが，それ以後は逆に表層地盤の影響のみが残留することが知られる。かかる特徴を調べるために，式(3.16)のように表層地盤のばね効果のみが考慮されている

$w_1(t)$ と，ばね効果と地震力の効果の連成した $w_2(t)$ とに分解して示したのが図 3.7 の(a)，(b)である。これら両図において，(a)は長軸方向の振動の場合であるが， $w_1(t)$ と $w_2(t)$ と全く性格の異なることが示されている。すなわち， $w_1(t)$ は立上がりが急激であるが，その後の振幅の減衰は著しいのに反し， $w_2(t)$ は立上がりはきわめて緩やかであり，その第 1 番目のピークが最大振幅とはならず，時間経過に対する振幅減少も非常に緩慢である。そのため $w(t)$ は時間が経つとともに，その振動周期が $T_g$ に近づき $w_2(t)$ の影響のみを受けることがわかる。また $w(t)$ が最初の 1 周期のところで大きく波形が乱れているのは， $w_1(t)$ と $w_2(t)$ との振幅は大差ないにもかかわらず，波形の位相がほぼ $180^\circ$ だけずれているために，両者がこの区間で大きく相殺し合っているのである。一方(b)の短軸方向の振動の場合も， $w_1(t)$ と $w_2(t)$ の振幅減少の傾向は(a)の長軸方向の振動の場合と同様であるが，この場合の両者の位相のずれは(a)の場合ほど大きくないので， $w_1(t)$ と $w_2(t)$ とによるそれほど大きな相殺効果は生じていないようである。

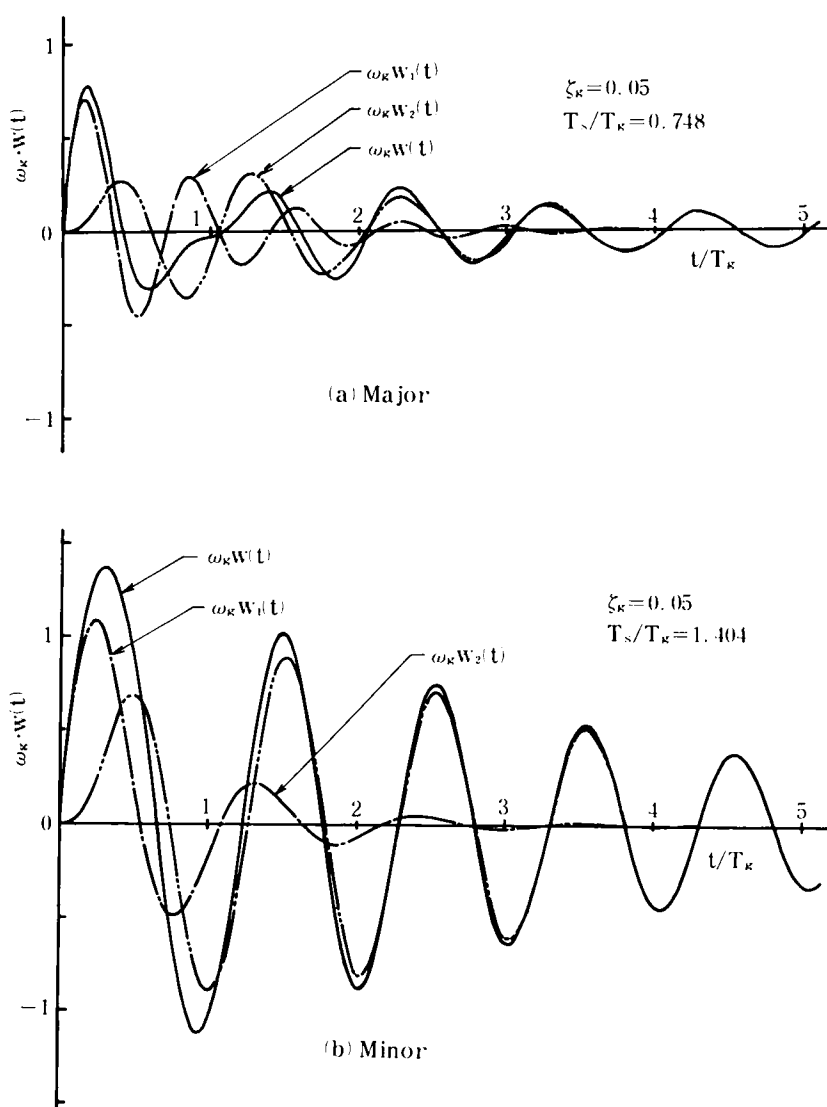


図 3.7 単位衝撃応答関数の構成

あり、1周期後はほぼ  $T_g$  の周期で減衰自由振動の形をとり、表層地盤よりの地震力の影響が大きく作用することを示している。

さらに図 3.8 は  $\zeta_g = 0.10$ ,  $\zeta_s = 0.05$  としたときの、 $a/b = 4.2$  の楕円柱および円柱が長・短軸方向に振動する際の単位衝撃応答関数の特徴を示したものである。この図からわかるように、当然のことながら短軸方向に振動する方が  $w(t)$  の振幅は大きく、かつまた長軸方向の振動では、 $t/T_g$  以内に必ず波形が大きく乱れ、そこで振幅は減少気味であるといえよう。さらに  $a/b = 4$  あるいは  $a/b = 2$  の場合の固有周期  $T_s$  は互に異なるにもかかわらず、同方向の振動に

おいては時間経過とともにほとんどその差はなくなること示している。

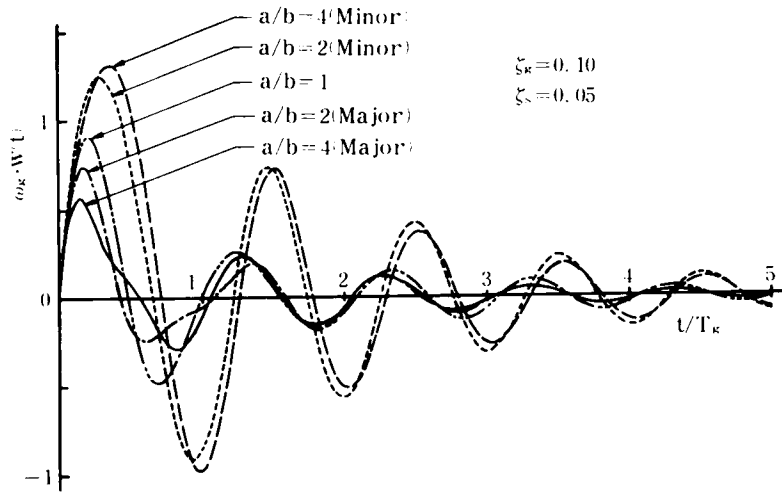


図 3.8 振動方向による単位衝撃応答関数

### 3.3 確率過程入力を受ける構造物の不規則地震応答

#### 3.3.1 応答確率量

対象とする基礎構造物が最初静止していて、時刻  $t=0$  より不規則外力  $f(t)$  を受けるとともに運動を開始するものとする。このとき構造物頂部の水平応答変位は、式 (3.16) あるいは式 (3.18) の単位衝撃応答関数  $w(t)$  を用いることにより次の積分の形に書き表わされる。

$$x(t) = \int_0^t w(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

ここで、入力  $f(t)$  をガウス分布に従う確率過程とすると、線形系における応答  $x(t)$  もまた同様にガウス確率過程となることは明らかである。したがって、この確率過程を規定するには平均値と分散のみを知れば十分であり、また多次元同時確率空間を対象にする場合は、上記の確率パラメータに相関係数を追加したものについて考えればよいことになる。ところで入力  $f(t)$  を平均値 0 の確率過程とすると、式 (3.20) より応答  $x(t)$  の平均値も 0 になることは容易に知られるが、このような平均値 0 の仮定をしても一般性は失なわれない。したがって、結局共分散を知れば確率過程を規定するパラメータを決定することができる。

そこで入力  $f(t)$  および応答変位  $x(t)$  の共分散をそれぞれ  $\phi_{ff}(t_1, t_2)$  および  $\phi_{xx}(t_1, t_2)$  と記すと、式 (3.20) より、



$$\begin{aligned}
\phi_{xx}(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)] \\
&= E\left[\int_0^{t_1} w(t_1 - \tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 \int_0^{t_2} w(t_2 - \tau_2)f(\tau_2)d\tau_2\right] \\
&= \int_0^{t_1} w(t_1 - \tau_1)d\tau_1 \int_0^{t_2} w(t_2 - \tau_2)E[f(\tau_1)f(\tau_2)]d\tau_2 \\
&= \int_0^{t_1} w(t_1 - \tau_1)d\tau_1 \int_0^{t_2} w(t_2 - \tau_2)\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (3.21)
\end{aligned}$$

となり，入力の変分散が定まれば応答のそれも定まることが分る。ただし， $f(t)$ や $x(t)$ は確率変数であると同時に，確率空間の1標本を示しているもので，入出力の関係は一義的である。このとき時刻  $t$  における応答変位の分散，応答速度の分散および両者の相関係数をそれぞれ  $\sigma_x^2(t)$ ， $\sigma_{\dot{x}}^2(t)$  および  $\rho_{x\dot{x}}(t)$  と記すと，これらは式(3.21)を用いて以下のように求めることができる。

$$\left.
\begin{aligned}
\sigma_x^2(t) &= E[x(t)x(t)] \\
&= \int_0^t w(t - \tau_1)d\tau_1 \int_0^t w(t - \tau_2)\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)d\tau_2 \\
\sigma_{\dot{x}}^2(t) &= E[\dot{x}(t)\dot{x}(t)] = \phi_{\dot{x}\dot{x}}(t, t) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_{xx}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=t} \\
&= \int_0^t \dot{w}(t - \tau_1)d\tau_1 \int_0^t \dot{w}(t - \tau_2)\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)d\tau_2 \\
\sigma_x(t)\sigma_{\dot{x}}(t)\rho_{x\dot{x}}(t) &= E[x(t)\dot{x}(t)] = \frac{\partial}{\partial t_2} \phi_{xx}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=t} \\
&= \int_0^t w(t - \tau_1)d\tau_1 \int_0^t \dot{w}(t - \tau_2)\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)d\tau_2
\end{aligned}
\right\} \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

ただし， $\dot{w}(t)$ は $w(t)$ を $t$ で微分したものである。

### 3.3.2 確率量による応答の評価

応答確率パラメータにより応答量の空間分布の状態を知ることができるが，応答量の評価をなすには，これだけでは不十分である。そこで，まず応答量がある設定レベルを越える回数について考えてみる。すなわち微小な時間間隔  $[t, t + dt]$  の間に，少なくとも一度レベル  $A$  を外向きに超過する確率は，単位時間当りのレベル  $A$  を外向きに超過する割合を  $m(A; t)$  として，Rice の理論<sup>7)</sup>を応用すれば次の関係式で表わされる。

$$P\{ |x(t)| < A \cap |x(t')| \geq A \}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty d\dot{x} \int_{A-\dot{x}dt}^A p(x, \dot{x}; t) dx + \int_{-\infty}^0 d\dot{x} \int_{-A}^{-A+\dot{x}dt} p(x, \dot{x}; t) dx \\
&= 2 dt \int_0^\infty \dot{x} p(A, \dot{x}; t) d\dot{x} = m(A; t) dt \quad \dots\dots\dots (3.23)
\end{aligned}$$

ここに、 $t \leq t' \leq t + dt$ であって、 $p(x, \dot{x}; t)$ は $x, \dot{x}$ に関する2次元同時確率密度関数を表わすものとし、両確率変数 $x, \dot{x}$ の相関係数を $\rho_{x\dot{x}}(t)$ とすると次式で与えられる。

$$p(x, \dot{x}; t) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2}} \exp\left[-\frac{\sigma_{\dot{x}}^2 x^2 - 2\sigma_x\sigma_{\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}x\dot{x} + \sigma_x^2 \dot{x}^2}{2\sigma_x^2\sigma_{\dot{x}}^2(1-\rho_{x\dot{x}}^2)}\right] \quad \dots (3.24)$$

この式(3.24)を式(3.23)に代入すると、結局次式が得られる。

$$\begin{aligned}
m(A; t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{\sigma_x}\right)^2\right\} \left[\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2} \exp\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}^2}{2(1-\rho_{x\dot{x}}^2)}\left(\frac{A}{\sigma_x}\right)^2\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\rho_{x\dot{x}}\left(\frac{A}{\sigma_x}\right)\left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\rho_{x\dot{x}}}{\sqrt{2(1-\rho_{x\dot{x}}^2)}}\frac{A}{\sigma_x}\right)\right\}\right\}\right] \quad \dots\dots\dots (3.25)
\end{aligned}$$

ただし、 $\operatorname{erf}(\quad)$ はerror functionのことである。

したがって運動を開始して $T$ 時間経過後のレベル $A$ を越す期待回数ないしは平均超過回数 $M(A; T)$ は超過率 $m(A; t)$ と時間軸とで囲む面積のことであるから

$$M(A; T) = \int_0^T m(A; \tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

で与えられる。しかるに、この $M(A; T)$ は $[0, T]$ の間に応答がレベル $A$ を少なくとも1回越える確率 $P\{|x(t)| > A; 0 \leq t \leq T\}$ の上限値を与えており<sup>8)</sup>、設定レベル $A$ が応答に比べてかなり大きい場合は、このレベルを超えるのはまれな現象となり、したがって

$$M(A; T) \cong P\{|x(t)| > A; 0 \leq t \leq T\}$$

と見なすことができる。またこの平均超過回数 $M(A; T)$ は、応答全体に概略的な見通しを与える量であるが、地震動の継続時間全体 $T$ について考えるときは、応答の地震動に対する追従性に関する情報は消し去られる。

ところで時刻 $t=0$ で静止していた構造物の応答が、時刻 $t$ まではレベル $A$ を超えることはないが、次の微小時間に初めてこのレベル $A$ を外向きに超えるような離散的単純マルコフ現象について考える。この様子を略示したのが図3.9の◎印である。このとき遷移確率 $q(A; t)$ は

次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 q(A; t) dt &= P\{ |x(t+dt)| > A \mid |x(t)| < A \} \\
 &= \frac{P\{ |x(t+dt)| > A \cap |x(t)| < A \}}{P\{ |x(t)| < A \}} \\
 &= \frac{m(A; t) dt}{\int_{-A}^A p(x; t) dx} \\
 &= \frac{m(A; t) dt}{2 \operatorname{erf}\left(\frac{A}{\sqrt{2} \sigma_x}\right)}
 \end{aligned}$$

………… ( 3.27 )

ただし、 $P\{ |x(t+dt)| > A \cap |x(t)| < A \}$ は時刻 $[t, t+dt]$ の間に少なくとも1回レベル $A$ を外向きに超過する確率のことであり、この $dt$ 時間内にレベル $A$ を外向きに超過する平均回数に等しい。

また応答 $x(t)$ が時刻 $t$ までにレベル $A$ を越えない確率 $P(A; t)$ を先の仮定のように、2つの離散的状態

$$\begin{aligned}
 P(A; t) &= P\{ |x(t^*)| \leq A; 0 \leq t^* \leq t \} \\
 &\cong P\{ |x(t)| < A \mid |x(0)| < A \}
 \end{aligned}
 \quad \text{………… ( 3.28 )}$$

で近似すれば、この離散的時系列における非超過確率分布 $P(A; t)$ は、 $q(A; t)$ を遷移確率とする純出生過程の方程式を満足し、その解は

$$P(A; T) = \exp \left\{ -\int_0^T q(A; \tau) d\tau \right\} \quad \text{………… ( 3.29 )}$$

与えられる<sup>9)</sup>。したがって、応答が時刻 $[t, t+dt]$ の間に初めて設定レベル $A$ を外向きに超える確率 $\bar{P}(A; t)$ は当然のことながら、

$$\bar{P}(A; t) = 1 - P(A; t) \quad \text{………… ( 3.30 )}$$

与えられる。これは破壊確率とも呼ばれているものである。ところで、このような単純な超過の過程は応答が高周波数成分を多く含む場合には精度が落ちてくると指摘されており<sup>10)</sup>した

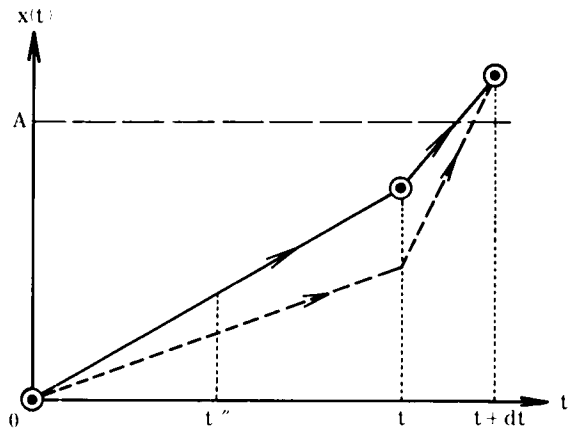


図 3.9 レベル超過の模式図

がって固有振動数の高い構造物の応答へ適用する場合は慎重でなければならないであろう。

### 3.4 定常確率過程入力に対する構造物の過渡応答

#### 3.4.1 定常ホワイトノイズ入力に対する応答変位の共分散

定常入力  $f(t)$  として，図 3.10 のように，単位周波数当りのスペクトル密度  $\Phi_f(\omega)$  が，  $2\pi D$

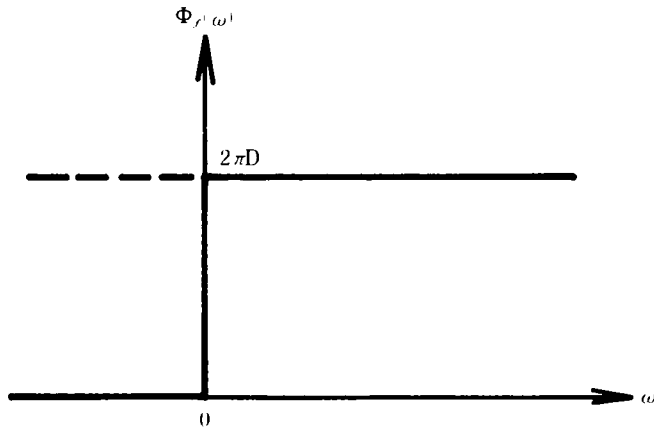


図 3.10 ホワイトノイズスペクトル

であるような，いわゆるホワイトノイズについて考える。このとき，入力  $f(t)$  の共分散  $\phi_{ff}(t_1, t_2)$  は一般には次式で与えられる。

$$\phi_{ff}(t_1, t_2) = \phi_{ff}(t_2 - t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\omega) e^{i(t_2 - t_1)\omega} d\omega = D\delta(t_2 - t_1) \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

ただし，実際上は  $\omega > 0$  の範囲しか考えられないが，スペクトル密度を周波数  $\omega$  の偶関数と拡張定義することにより，結果に影響を与えることなく Fourier 変換を行ないうる。ところで，このような無限遠までスペクトル構造を持つということは，入力のパワーが有限でなくなり，物理的には意味はないが，このような定常入力を用いると応答  $x(t)$  は入力の影響を考慮することなく系の応答特性のみを調べることで解析しうる利点がある。また実際上は硬質の基盤面における入力のスペクトルは一般にかなりの周波数範囲まで平坦であるとも言われており，この解析はそのような場合に相当しよう。

かくして，式 (3.31) の入力の共分散  $\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)$  を式 (3.21) に持込むことによって，応答

の共分散  $\phi_{xx}(t_1, t_2)$  は以下のように得られる。

i)  $\mu_0(1+\chi) - h\epsilon^2 \geq 0$  のとき :

$$\begin{aligned}
\phi_{xx}(t_1, t_2) = & \lambda_{11} \left[ e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \left\{ \Delta_1 \omega_1 \sin \omega_1(t_2-t_1) + \omega_1^2 \cos \omega_1(t_2-t_1) \right\} \right. \\
& - e^{-\Delta_1(t_1+t_2)} \left\{ \Delta_1 \omega_1 \sin \omega_1(t_1+t_2) + \omega_1^2 \cos \omega_1(t_2-t_1) + 2 \Delta_1^2 \sin \omega_1 t_1 \sin \omega_1 t_2 \right\} \\
& + \lambda_{12} \left[ e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \left\{ \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) + \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) \right\} \right. \\
& - e^{-\Delta_1(t_1+t_2)} \left\{ \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) + 2 \Delta_1^2 \sin(\omega_1 t_2 - \delta_1) \sin \omega_1 t_1 + \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_1+t_2) \right. \\
& \left. \left. - \delta_1) \right\} \right] + \lambda_{13} \left[ \omega_1 e^{-\Delta_2(t_2-t_1)} \sin(\omega_2(t_2-t_1) + \delta_2 + \epsilon_1) \right. \\
& - e^{-(\Delta_2 t_2 + \Delta_1 t_1)} \left\{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_1^2} \sin(\omega_2 t_2 + \delta_2) \sin(\omega_1 t_1 + \epsilon_2) + \omega_2 \cos(\omega_2 t_2 + \delta_2) \cdot \right. \\
& \left. \left. \sin(\omega_1 t_1 + \epsilon_3) \right\} \right] + \lambda_{21} \left[ e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \left\{ -2 \Delta_1^2 \sin \omega_1(t_2-t_1) \sin \delta_1 + \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_2-t_1) + \delta_1) \right. \right. \\
& \left. \left. + \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) \right\} - e^{-\Delta_1(t_1+t_2)} \left\{ 2 \Delta_1^2 \sin(\omega_1 t_1 - \delta_1) \sin \omega_1 t_2 + \omega_1^2 \cos(\omega_1(t_2 \right. \right. \\
& \left. \left. - t_1) + \delta_1) + \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_1+t_2) - \delta_1) \right\} \right] + \lambda_{22} \left[ e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \left\{ \omega_2 \sin(\omega_1(t_2-t_1) + \epsilon_3) \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \cos \delta_2 + \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_1^2} \sin(\omega_1(t_2-t_1) + \epsilon_2) \sin \delta_2 - e^{-(\Delta_1 t_2 + \Delta_2 t_1)} \left\{ \omega_1 \sin(\omega_2 t_1 + \delta_2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \epsilon_1) \cos \omega_1 t_2 + \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_2 t_1 + \delta_2 + \epsilon_4) \sin \omega_1 t_2 \right\} \right] \right. \\
& \left. + \lambda_{23} \left[ e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \left\{ -2 \Delta_1^2 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1) \sin \delta_1 + \omega_1^2 \cos \omega_1(t_2-t_1) + \Delta_1 \omega_1 \cdot \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \sin(\omega_1(t_2-t_1) - 2\delta_1) \right\} - e^{-\Delta_1(t_1+t_2)} \left\{ 2 \Delta_1^2 \sin(\omega_1 t_1 - \delta_1) \sin(\omega_1 t_2 - \delta_1) + \omega_1^2 \cos \omega_1(t_2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - t_1) + \Delta_1 \omega_1 \sin(\omega_1(t_1+t_2) - 2\delta_1) \right\} \right] + \lambda_{24} \left[ e^{-\Delta_2(t_2-t_1)} \left\{ -\sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \cdot \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \sin(\omega_2(t_2-t_1) + \delta_2 + \epsilon_4) \sin \delta_1 + \omega_1 \sin(\omega_2(t_2-t_1) + \delta_2 + \epsilon_1) \cos \delta_1 \right\} \right. \right. \\
& \left. - e^{-(\Delta_2 t_2 + \Delta_1 t_1)} \left\{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_2 t_2 + \delta_2 + \epsilon_4) \sin(\omega_1 t_1 - \delta_1) + \omega_1 \sin(\omega_2 t_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta_2 + \epsilon_1) \cos(\omega_1 t_1 - \delta_1) \right\} + e^{-\Delta_1(t_2-t_1)} \left\{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_1^2} \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1 + \epsilon_2) \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \sin \delta_2 + \omega_2 \sin(\omega_1(t_2-t_1) - \delta_1 + \epsilon_3) \cos \delta_2 \right\} - e^{-(\Delta_1 t_2 + \Delta_2 t_1)} \left\{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_1 t_2 \right. \right. \\
& \left. \left. - \delta_1) \sin(\omega_2 t_1 + \delta_2 + \epsilon_4) + \omega_1 \cos(\omega_1 t_2 - \delta_1) \sin(\omega_2 t_1 + \delta_2 + \epsilon_1) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{25} \left[ e^{-\wedge_2(t_2-t_1)} \left\{ 2 \wedge_2^2 \sin(\omega_2(t_2-t_1) + \delta_2) \sin \delta_2 + \omega_2^2 \cos \omega_2(t_2-t_1) + \wedge_2 \omega_2 \sin(\omega_2(t_2 \right. \\
& \left. - t_1) + 2 \delta_2) \right\} - e^{-\wedge_2(t_1+t_2)} \left\{ 2 \wedge_2^2 \sin(\omega_2 t_1 + \delta_2) \sin(\omega_2 t_2 + \delta_2) + \omega_2^2 \cos \omega_2(t_2-t_1) \right. \\
& \left. + \wedge_2 \omega_2 \sin(\omega_2(t_1+t_2) + 2 \delta_2) \right\} \right], \quad (t_2 \geq t_1 \geq 0) \quad \dots\dots\dots (3.32)
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega_s \frac{\sqrt{\mu_0(1+\chi) - h e^2}}{\mu_0}, \quad \lambda_{11} = \frac{\alpha'^2 D}{4 \wedge_1 \omega_1^2 (\wedge_1^2 + \omega_1^2)} \\
\lambda_{12} &= \frac{\alpha' \beta' k_3 \omega_g^2 D}{4 \wedge_1 \omega_1 (\wedge_1^2 + \omega_1^2) \left[ \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \right\} \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \right\} \right]^{1/2}} \\
\lambda_{13} &= \frac{\alpha' \beta' k_3 \omega_g D}{\zeta_g^* \omega_1 \left[ \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \right\} \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \right\} \right]^{1/2}} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{\left\{ (\wedge_1 + \wedge_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \right\} \left\{ (\wedge_1 + \wedge_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \right\} \right]^{1/2}} \\
\lambda_{21} &= \lambda_{12}, \quad \lambda_{22} = \lambda_{13} \\
\lambda_{23} &= \frac{\beta'^2 k_3^2 \omega_g^4 D}{4 \wedge_1 \omega_1^2 (\wedge_1^2 + \omega_1^2) \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \right\} \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \right\}} \\
\lambda_{24} &= \frac{\beta' k_3^2 \omega_g^3 D}{\zeta_g^* \omega_1 \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \right\} \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \right\}} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{\left[ \left\{ (\wedge_1 + \wedge_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \right\} \left\{ (\wedge_1 + \wedge_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \right\} \right]^{1/2}} \\
\lambda_{25} &= \frac{\beta'^2 k_3^2 \omega_g^2 D}{4 \zeta_g^{*2} \wedge_2 (\wedge_2^2 + \omega_2^2) \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \right\} \left\{ (\wedge_1 - \wedge_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \right\}} \\
\delta_1 &= \tan^{-1} \frac{2 \omega_1 (\wedge_2 - \wedge_1)}{(\wedge_1 - \wedge_2)^2 + \omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \delta_2 = \tan^{-1} \frac{2 \omega_2 (\wedge_2 - \wedge_1)}{(\wedge_1 - \wedge_2)^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \tan^{-1} \frac{2 \omega_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}, & \epsilon_2 &= \tan^{-1} \frac{\omega_1 \{ (\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2 \}}{(\Delta_1 + \Delta_2) \{ (\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \}} \\ \epsilon_3 &= \tan^{-1} \frac{2 \omega_1 (\Delta_1 + \Delta_2)}{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2}, & \epsilon_4 &= \tan^{-1} \frac{\omega_2 \{ (\Delta_1 + \Delta_2)^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2 \}}{(\Delta_1 + \Delta_2) \{ (\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \}} \end{aligned} \right| \dots\dots\dots (3.33)$$

ii)  $\mu_0 (1 + \chi) - h_e^2 < 0$  のとき :

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(t_1, t_2) &= \lambda'_{11} \left[ \frac{e^{-(\Delta_1 - \omega'_1) t_2} \sinh(\Delta_1 - \omega'_1) t_1}{\Delta_1 - \omega'_1} + \frac{e^{-(\Delta_1 + \omega'_1) t_2} \sinh(\Delta_1 + \omega'_1) t_1}{\Delta_1 + \omega'_1} \right. \\ &\quad - \frac{2}{\Delta_1} e^{-\Delta_1 t_2} \sinh \Delta_1 t_1 \cosh \omega'_1 (t_2 - t_1) \left. \right] + \lambda'_{12} \left[ \omega'_1 e^{-\Delta_2 (t_2 - t_1)} \sin(\omega_2 (t_2 - t_1) - \delta'_1 + \epsilon'_1) \right. \\ &\quad - e^{-(\Delta_1 t_1 + \Delta_2 t_2)} \left\{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_2 t_2 - \delta'_1 + \epsilon'_2) \sinh \omega_1 t_1 + \omega'_1 \sin(\omega_2 t_2 - \delta'_1 \right. \\ &\quad + \epsilon'_1) \cosh \omega'_1 t_1 \left. \right\} + \lambda'_{21} \left[ -e^{-\Delta_1 (t_2 - t_1)} \left\{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\delta'_1 - \epsilon'_2) \sinh \omega'_1 (t_2 - t_1) \right. \right. \\ &\quad + \omega'_1 \sin(\delta'_1 - \epsilon'_1) \cosh \omega'_1 (t_2 - t_1) \left. \right\} - e^{-(\Delta_2 t_1 + \Delta_1 t_2)} \left\{ \sqrt{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_2 t_1 \right. \\ &\quad - \delta'_1 + \epsilon'_2) \sinh \omega'_1 t_2 + \omega'_1 \sin(\omega_2 t_1 - \delta'_1 + \epsilon'_1) \cosh \omega'_1 t_2 \left. \right\} \left. \right] \\ &\quad + \lambda'_{22} \left[ e^{-\Delta_2 (t_2 - t_1)} \left\{ -2 \Delta_2^2 \sin(\omega_2 (t_2 - t_1) - \delta'_1) \sin \delta'_1 + \omega_2^2 \cos \omega_2 (t_2 - t_1) \right. \right. \\ &\quad + \Delta_2 \omega_2 \sin(\omega_2 (t_2 - t_1) - 2 \delta'_1) \left. \right\} - e^{-\Delta_2 (t_1 + t_2)} \left\{ 2 \Delta_2^2 \sin(\omega_2 t_2 - \delta'_1) \sin(\omega_2 t_1 - \delta'_1) \right. \\ &\quad + \omega_2^2 \cos \omega_2 (t_2 - t_1) + \Delta_2 \omega_2 \sin(\omega_2 (t_1 + t_2) - 2 \delta'_1) \left. \right\} \left. \right], \quad (t_2 \geq t_1 \geq 0) \end{aligned}$$

\dots\dots\dots (3.34)

ただし,

$$\left. \omega'_1 = \omega_s \frac{\sqrt{h_e^2 - \mu_0 (1 + \chi)}}{\mu_0}, \quad \lambda'_{11} = \frac{\alpha'^2 D}{4 \omega_1'^2} \right|$$

$$\begin{aligned}
\lambda'_{12} &= \frac{\alpha' \beta' k_3 \omega_g D}{\zeta_g^* \omega_1' \left\{ (\Delta_1 - \Delta_2 - \omega_1')^2 + \omega_2'^2 \right\} \left\{ (\Delta_1 - \Delta_2 + \omega_1')^2 + \omega_2'^2 \right\}} \\
&\quad \frac{1}{\left\{ (\Delta_1 + \Delta_2 - \omega_1')^2 + \omega_2'^2 \right\} \left\{ (\Delta_1 + \Delta_2 + \omega_1')^2 + \omega_2'^2 \right\}}^{1/2} \\
\lambda'_{21} &= \lambda'_{12}, \quad \lambda'_{22} = \frac{\beta'^2 k_3^2 D}{4 \zeta_g^{*2} \left\{ (\Delta_1 - \Delta_2 - \omega_1')^2 + \omega_2'^2 \right\} \left\{ (\Delta_1 - \Delta_2 + \omega_1')^2 + \omega_2'^2 \right\}} \\
\epsilon'_1 &= \tan^{-1} \frac{2 \omega_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{(\Delta_1 + \Delta_2)^2 - \omega_1'^2 - \omega_2'^2}, \quad \epsilon'_2 = \tan^{-1} \frac{\omega_2 \left\{ (\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \omega_1'^2 + \omega_2'^2 \right\}}{(\Delta_1 + \Delta_2) \left\{ (\Delta_1 + \Delta_2)^2 - \omega_1'^2 - \omega_2'^2 \right\}} \\
\delta'_1 &= \tan^{-1} \frac{2 \omega_2 (\Delta_1 - \Delta_2)}{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 - \omega_1'^2 - \omega_2'^2} \\
&\dots\dots\dots (3.35)
\end{aligned}$$

以上のようにして得られた応答変位の共分散  $\phi_{xx}(t_1, t_2)$  を式 (3.22) に適用することにより、応答変位・応答速度の分散  $\sigma_x^2(t)$ ,  $\sigma_{\dot{x}}^2(t)$  および両者の相関係数  $\rho_{x\dot{x}}(t)$  が解析的に得られることは明らかである。

### 3.4.2 過渡応答に関する数値計算結果とその考察

数値計算上に必要な諸定数・係数等は先述の単位衝撃応答関数の決定において採用した値をそのまま用いるものとする。また構造物の動揺振動の粘性減衰定数  $\zeta_g$  は常に 0.05 の値を用いるものとし、一方表層地盤のせん断振動に対する粘性減衰定数  $\zeta_g$  は特に断らないかぎり 0.10 を用いるものとする。それゆえ、このような数値を与える場合は  $\mu_0(1+\chi) - h_e^2 > 0$  となり、3.4.1 の i) を検討すればよいことになる。

さてこのように定常ホワイトノイズ入力を受ける振動系の応答については、Cauchy<sup>11)</sup> に始つて以来数多くの研究者により解析が行なわれてきたがほとんどの場合その対象とする振動系は単純な 1 質点系あるいはその組合わされた系についてであった。ところで本研究におけるように、近似的ではあるが、半無限媒体と構造物の連成系では逸散減衰効果が重要な役割を果たすので、以後の数値的例示はこの点に重点を置いている。図 3.1 1～図 3.1 4 までは、表層地盤の内部減衰の大小による基礎体頂部の水平変位  $x(t)$  および水平速度  $\dot{x}(t)$  の分散の変動について示したものである。またこれらの図中の点線で表わされた曲線は表層地盤が存在しない場合の応答を示したもので、これとの比較により地中構造物に対する周辺地盤の影響を知ることができる。まず図 3.1 1, 3.1 2 はそれぞれ長軸方向(Major)および短軸方向(Minor)にお



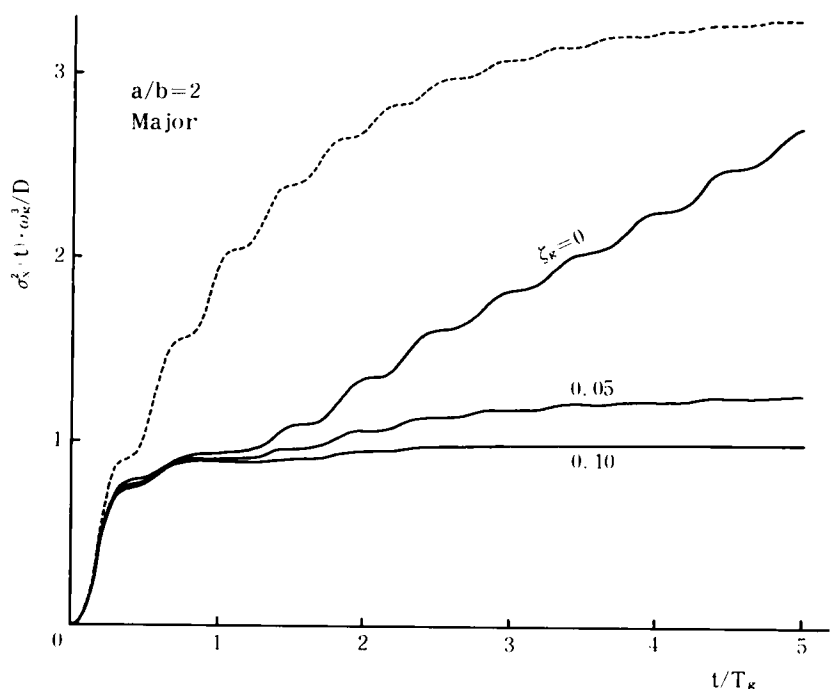


図 3.11 応答変位の分散

ける応答変位の分散であるが、断面の長短径比  $a/b=2$  の場合の長軸方向の振動では表層地盤に粘性減衰が存在すると、最初の時刻  $T_g$  で過渡応答はほとんど完了し定常状態に達しているが、これは図 3.6(a) の単位衝撃応答関数  $w(t)$  が最初の  $T_g$  を過ぎるとその振幅が急速に減少し、過去の応答の履歴を失う特徴と一致しているといえよう。 $w(t)$  に関しては  $\zeta_g=0$  の場合ですら最初の時刻  $T_g$  までは、その振幅は急速な減少傾向にあるため、図 3.11 では  $\zeta_g=0$  の場合の分散  $\sigma_x^2(t)$  も最初の時刻  $T_g$  でいったん応答が安定しており、それ以後は  $w(t)$  の振幅が周期的な定常状態になるので、過去の応答は定常的に蓄積され分散  $\sigma_x^2(t)$  は時間とともに直線的に増加していく様子がよく示されている。また表層に粘性抵抗が存在する限り、構造物にとって周辺地盤は相当の制振効果を与えているといえよう。一方図 3.12 は、断面の長短径比が  $a/b=2$  の構造物が短軸方向に振動する際の応答変位の分散の図であるが、長軸方向の振動の場合に比べてその応答振幅は相当大きく、図 3.6 のように  $w(t)$  の振幅は時間とともに単調に減少するので、分散  $\sigma_x^2(t)$  も定常状態に達するまでかなりの時間を要すると言えよう。またこの場合でも構造物周辺地盤は構造物に対して制振効果を発揮していることが分る。さらに図 3.13 および図 3.14 はそれぞれ  $a/b=2$  の断面の地中構造物が長軸および短軸方向に振動する場合の、応答速度の分散を示したものである。いずれの方向の振動においても応答変位の分散の傾向と

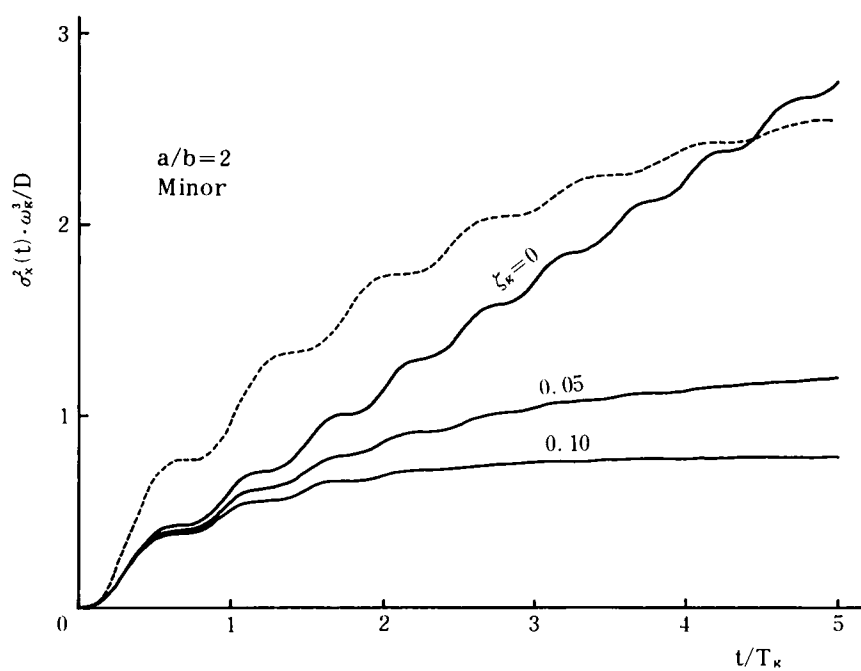


図 3. 12 応 答 変 位 の 分 散

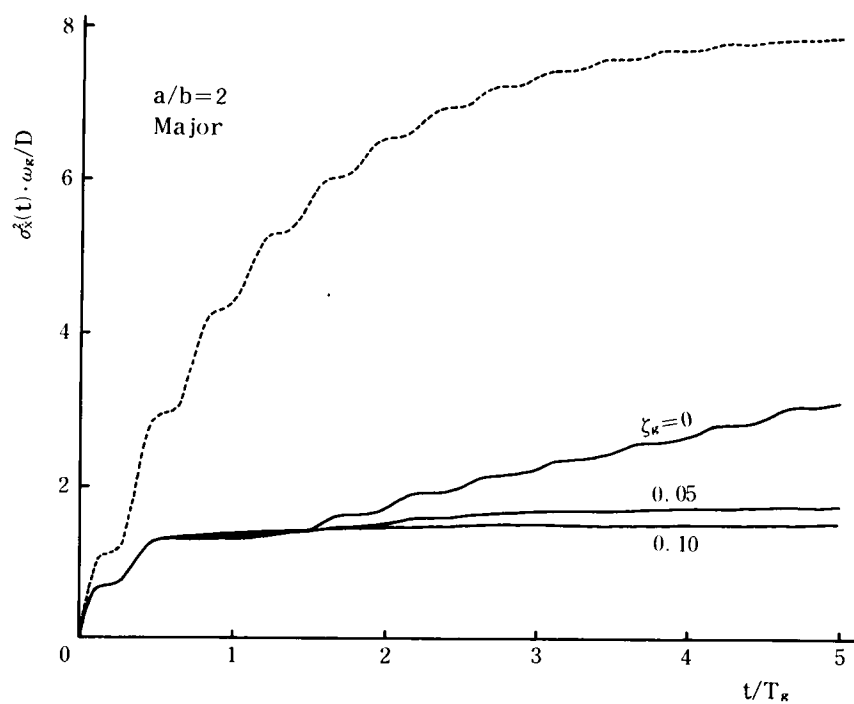


図 3. 13 応 答 速 度 の 分 散

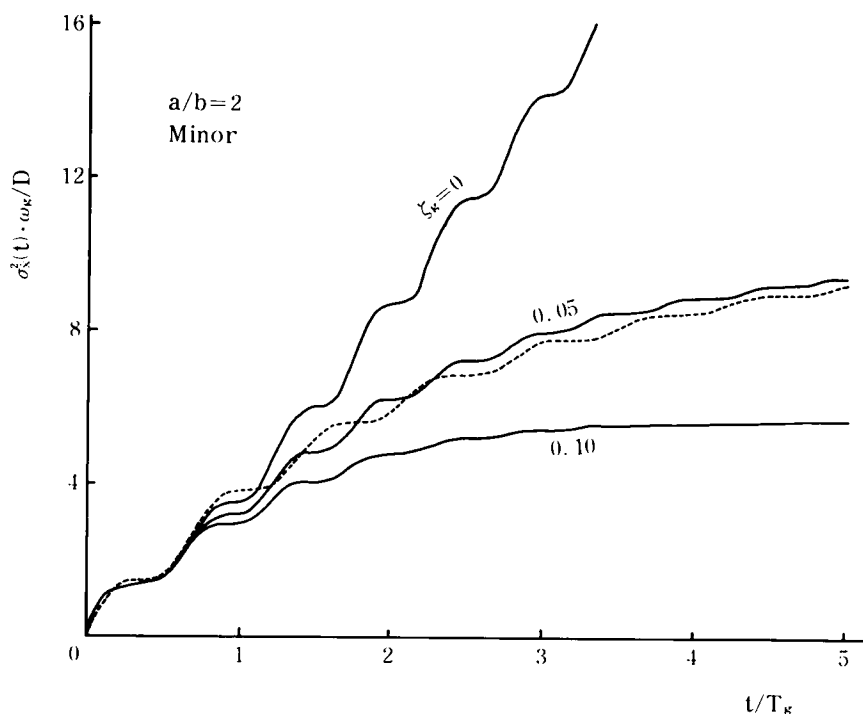


図 3.14 応答速度の分散

ほとんど同じ傾向がうかがわれるが、図 3.14 の短軸方向の振動において見るように、応答速度に関しては周辺地盤は必ずしも減衰効果を与えるわけではないことを示している。

図 3.15 は断面の長短径比  $a/b=1.2, 4$  の構造物が、その長軸・短軸の方向の振動をする際の応答値の標準偏差を示しているが、一般に短軸方向の振動における応答値は長軸方向の振動におけるそれらに比べて大きく、また図 3.5 の周波数応答における短軸方向の振動では  $a/b=4$  の場合の方が  $a/b=2$  の場合よりも共振振幅は大きいにもかかわらず、このように不規則外力を受ける場合の両者の応答値の大小関係は逆になっており、応答確率量は必ずしも周波数応答倍率の大小関係をそのまま反映するものではないことを示している。図 3.16 の応答速度の標準偏差についても上記とほとんど同様の関係が成立することが知られるが、最初の立上りが非常に急であるのは、入力平坦な周波数構造を持っているため、初動時には高周波成分が卓越することによるものと解される。さらに応答変位  $x(t)$  と応答速度  $\dot{x}(t)$  との相関係数  $\rho_{x\dot{x}}(t)$  について図 3.17 および図 3.18 に示したが、前者は減衰定数  $\zeta_g$  の大小が  $x(t)$  と  $\dot{x}(t)$  との相関に与える影響について、後者は断面形および振動方向による影響について比較したものである。前者において  $\rho_{x\dot{x}}(t)$  は時間  $t$  とともに減少し、相関が次第に失われていき、減衰定数  $\zeta_g$  が大なるほどその傾向が著しいことがわかる。しかるに長軸方向の振動においては、最初の  $T_g$  時間に相関が

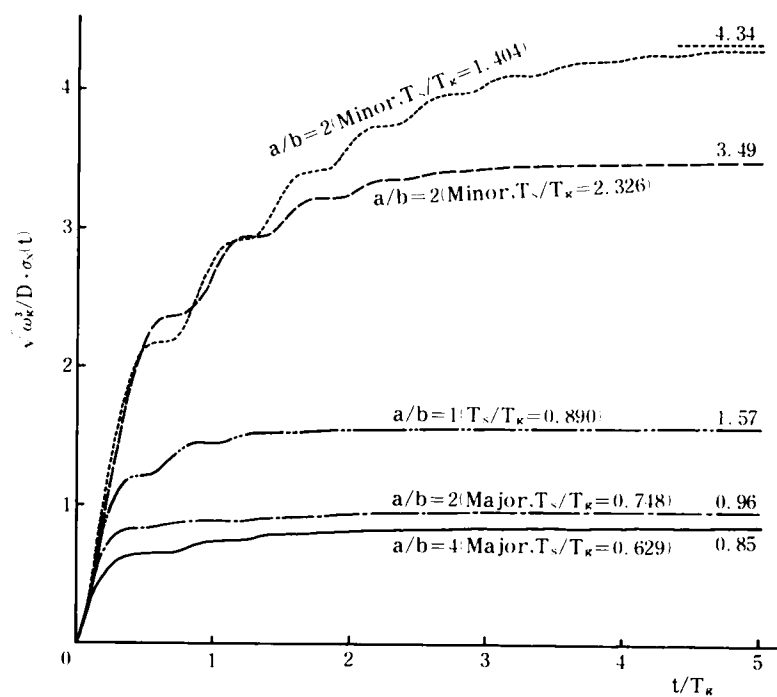


図 3.15 応答変位の標準偏差の比較

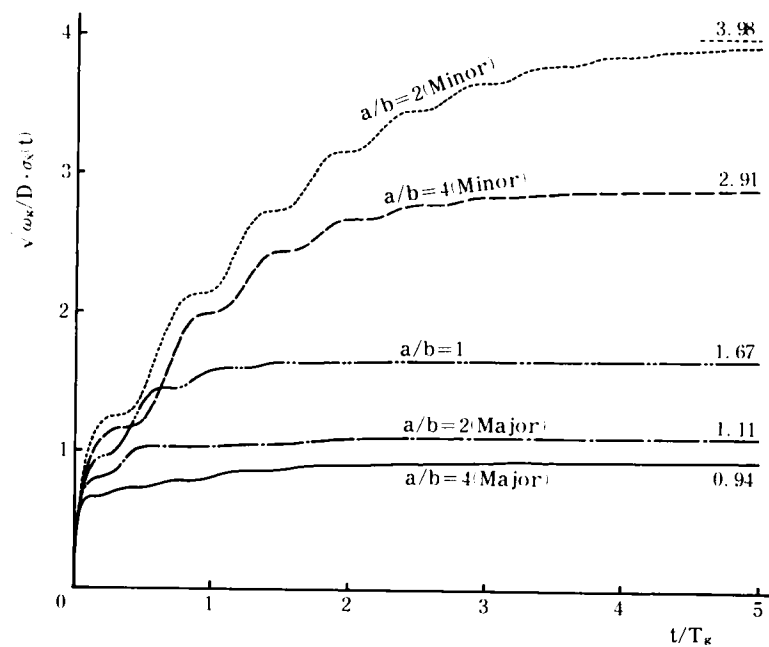


図 3.16 応答速度の標準偏差の比較

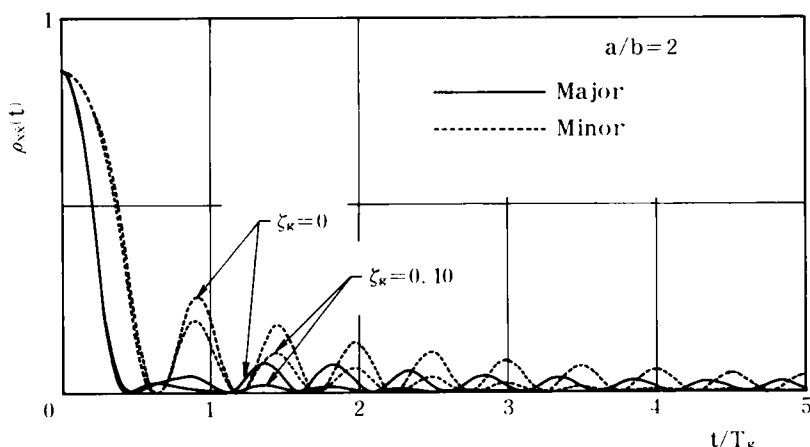


図 3.17 相関係数（応答変位—応答速度）

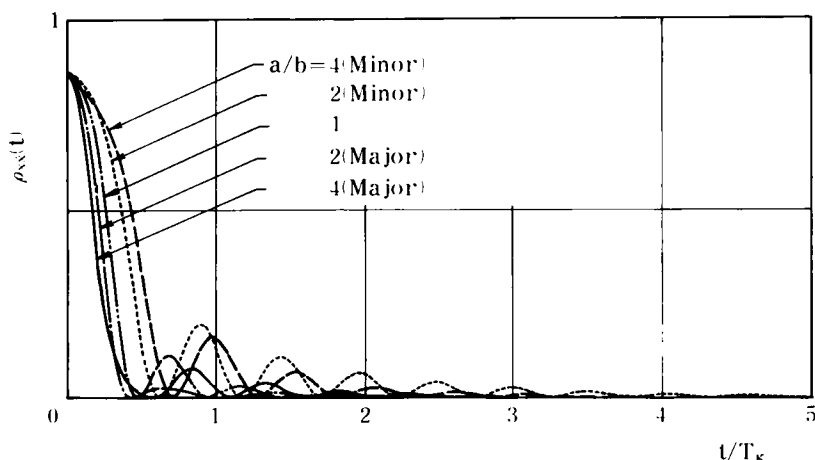


図 3.18 相関係数（応答変位—応答速度）

極端に失なわれるのは、やはり単位衝撃応答関数の性格に起因するものと思われる。一方後者の図では、短軸方向の振動においては応答  $x(t)$  と  $\dot{x}(t)$  との相関が比較的大きく、かなりの時間までその影響が残ることを示している。

さて、以上のような確率パラメータ  $\sigma_x(t)$ ,  $\sigma_{\dot{x}}(t)$  および  $\rho_{x\dot{x}}(t)$  を用いて、応答変位の絶対値  $|x(t)|$  があるレベル  $A$  を外向きに超過する単位時間当りの超過率  $m(A; t)$  を示したのが、図 3.19 および図 3.20 である。図 3.19 は無次元応答設定レベル  $A\sqrt{\omega_g^3/D}=1$  の場合の、長短径比  $a/b=1, 2, 4$  の構造物の長軸(Major)・短軸(Minor)方向の振動における  $m(A; t)$  を示しているが、図 3.15 における応答変位の定常状態の標準偏差が 1 より大きい場合には超過率  $m(A; t)$  も定常状態に早く達するが、 $a/b=4$  の長軸方向の振動(Major)の場合のように、その応答変位の標準偏差の定常値がほぼ 1 に等しい場合は、超過率  $m(A; t)$  の過渡状態が長引

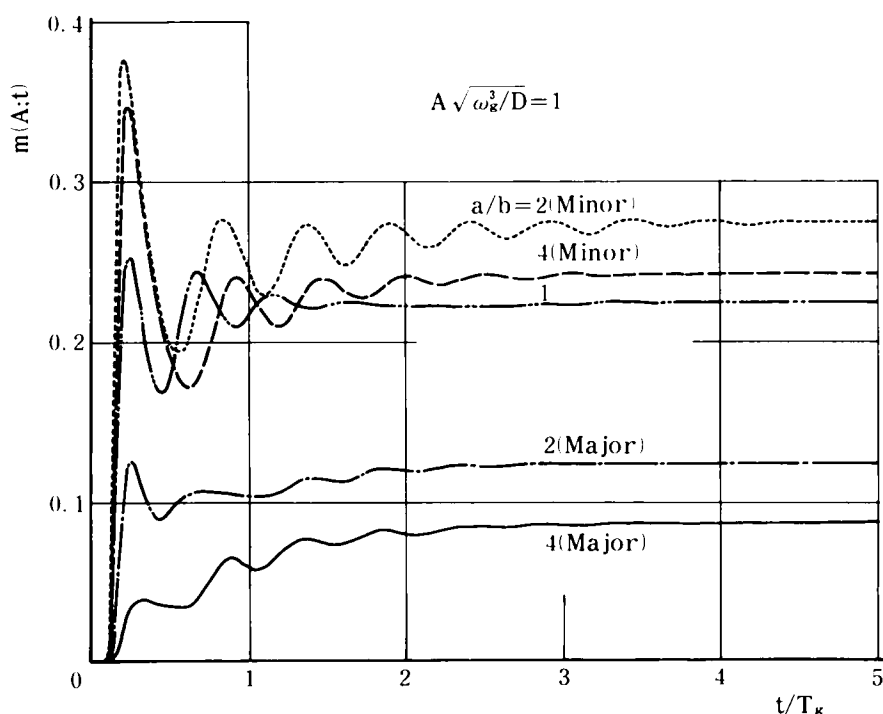


図 3.19 単位時間当りのレベル超過率

くことが分る。また超過レベルが低いときは運動開始と同時に  $m(A; t)$  が急速に増大するが、これは入力定常ホワイトノイズであるため、初期の段階では変位が小さいにもかかわらず高周波成分が卓越することからくるものであろう。このような場合には  $m(A; t)$  は割合すみやかに一定値に近づくわけである。

一方図 3.2.0 は断面が  $a/b = 2$  の楕円柱が長・短軸方向に振動する場合についての計算結果であるが、これからも分るように、長軸方向の振動では超過レベルの如何にかかわらず、 $t = T_g$  までには過渡応答がおおむね完了しているのに反し、短軸方向の振動では超過レベルが高いほど過渡状態は長くなるというように、過渡状態から定常状態に達するまでの時間は超過レベルに大いに左右されることがよく示されている。また無次元設定レベル  $A \sqrt{\omega_g^3/D}$  を 1.5 より 1.0, 0.5 と減ずるにつれて、短軸方向の振動では超過率  $m(A; t)$  はわずかながら増加するが、長軸方向の振動では超過率は急速に増加するため、ついには無次元設定レベルが 0.5 よりわずかに小さい値のとき、長軸方向の振動の超過率  $m(A; t)$  が短軸方向のそれを上回る状態が存在するであろうことが推測される。ところで図 3.15 の標準偏差曲線群において、 $a/b = 2$  の断面の短軸方向および長軸方向の振動における定常状態の標準偏差の比は  $4.34/0.96 \cong 4.5$  である。そこで図 3.2.0 において両振動方向における設定レベルの比をほぼそれぞれの標準偏

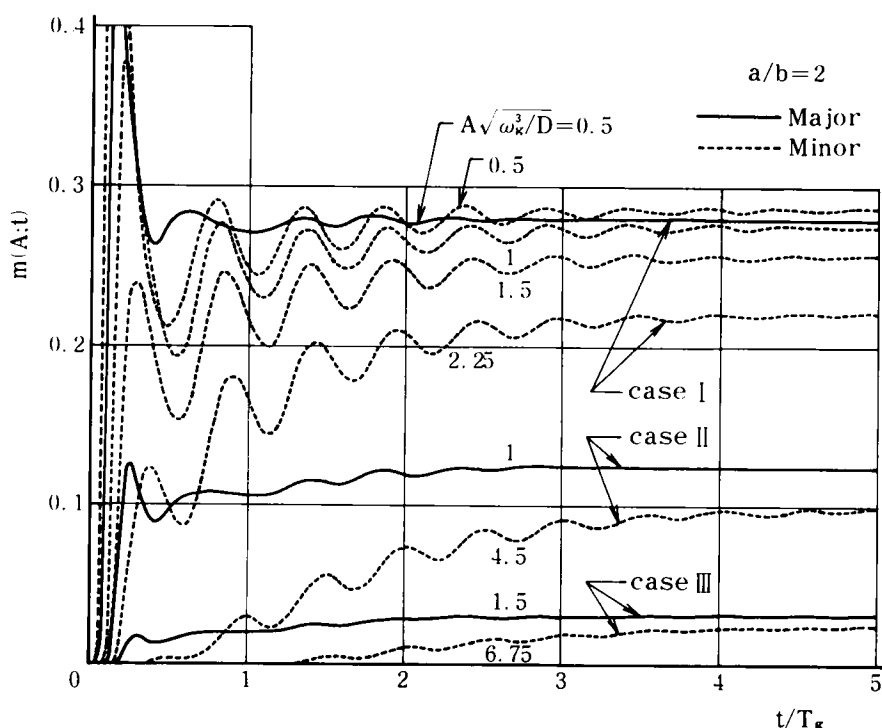


図 3.20 単位時間当りのレベル超過率

差の定常値の比に等しく保ちながら設定レベルを高めると、両振動方向における単位時間当りのレベル超過率  $m(A; t)$  が時間とともに接近してくるが、それと同時に短軸方向の振動における  $m(A; t)$  は最初のレベルを超えない状態が発達してくることが知られる。このことは短軸方向の振動では過渡状態が長引いている結果に他ならない。

図 3.2.1 は応答  $x(t)$  がある時間  $T$  を経過した時まで設定レベル  $A$  を超える回数の期待値（平均超過回数） $M(A; T)$  を長短径比  $a/b=2$  の場合について示したものである。当然のことながら経過時間  $T$  が増すほど、あるいは設定レベル  $A\sqrt{\omega_g^3/D}$  が小さいほどこの平均超過回数  $M(A; T)$  は増大する。設定レベルが  $A\sqrt{\omega_g^3/D}=1$  のように比較的低いときは、図 3.2.0 における  $m(A; t)$  の初期の立ち上がりが大きいため、長・短軸方向の振動におけるこの  $M(A; t)$  も初期こう配は大きいようであるが、レベル  $A\sqrt{\omega_g^3/D}$  をそれよりも大きく設定すると、長軸方向の振動の場合の  $m(A; t)$  はレベルに関係なくほとんど最初より定常状態になっているので、やはり平均超過回数  $M(A; T)$  の初期こう配は大きく、時間経過に対して変化せずにほとんどそのままの状態を増大する。一方短軸方向の振動では設定レベルが比較的低いところでも  $m(A; t)$  の初期の立ち上がりはそれほど大きくはなく、むしろ過渡状態が長く続くためにこの平均超過回数  $M(A; T)$  はレベル  $A\sqrt{\omega_g^3/D}$  の大なるときは経過時間  $T$  の増大に対して初期の増加は緩や

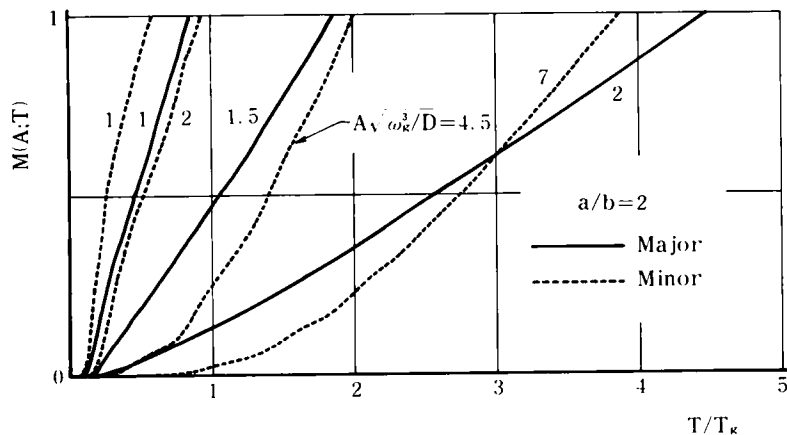


図 3.21 平均超過回数（過渡応答）

かである。このように平坦なスペクトル構造の入力を受けるときは、長軸方向の振動では共振振幅は大きくないにもかかわらず、構造物の固有振動数が比較的高く、かつ応答がすみやかに定常状態に達するために、かなり低いレベルを超過する機会は短軸方向の振動の場合より多い状態も出現することが示されていると言えよう。

### 3.5 非定常確率過程入力に対する構造物の非定常応答

#### 3.5.1 単一卓越周波数を持つ非定常確率過程入力に対する応答確率量

ここで非定常性というのは、時間領域における不規則地震動の消長現象を指すものであって、地震動の属する確率空間は時間から独立したものとする。したがって、通常は不規則地震動は非時間性の定常確率過程と強度の時間軸上の推移を示す形状関数との積の形で表わされることが多く、この手法はいわば準定常確率過程とも言われるべきものであるが、本章においてもこの手法を踏襲するものとする。

上記の形状関数  $\psi(t)$  としては種々の形が考えられるが、本章では図 3.2.2 にも示しているように、次のものを用いる。

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_p} \exp \left( 1 - \frac{t}{t_p} \right), & (t \geq 0) \\ 0, & (t < 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.36)$$

一方、入力  $f(t)$  を上述のように



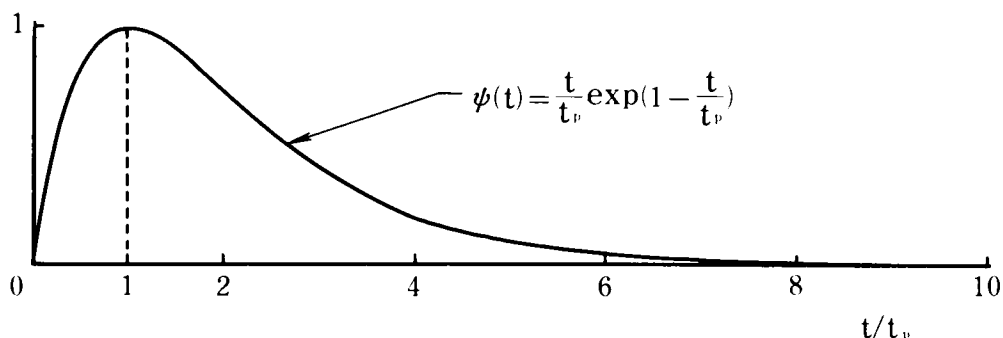


図 3.22 地震動の形状関数

$$f(t) = \psi(t) \cdot g(t) \quad \dots\dots\dots (3.37)$$

と表わすものとする。ただし、 $g(t)$ は定常確率過程に従う確率変数であるが、 $g(t)$ として任意のスペクトル構造を持たせることができる定常確率過程として

$$g(t) = a_0 \cos(\eta t + \varphi) \quad \dots\dots\dots (3.38)$$

なる形が提唱されており<sup>12)</sup>、本章においてはこの方法によるものとする。このとき $a_0$ は加速度の次元を持つ定数、 $\eta$ は確率密度関数 $P_g(\eta)$ を持つ確率変数であり、 $\varphi$ は $[0, 2\pi]$ で一様分布する位相角である。

したがって、この場合の入力の共分散 $\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)$ は、式(3.37)および式(3.38)より

$$\begin{aligned} \phi_{ff}(\tau_1, \tau_2) &= E[f(\tau_1)f(\tau_2)] = \frac{a_0^2}{2} \psi(\tau_1)\psi(\tau_2) \cdot E[\cos \eta(\tau_1 - \tau_2)] \\ &= -\frac{a_0^2}{2} \psi(\tau_1)\psi(\tau_2) \int_0^\infty P_g(\eta) \cos \eta(\tau_1 - \tau_2) d\eta \quad \dots\dots\dots (3.39) \end{aligned}$$

となるので、入力加速度の分散 $\sigma_f^2(t)$ は入力加加速度の分散 $\sigma_j^2(t)$ および両者の相関係数 $\phi_{ff}(t)$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_f^2(t) &= \frac{a_0^2}{2} \psi^2(t) \int_0^\infty P_g(\eta) d\eta = \frac{a_0^2}{2} \psi^2(t) \\ \sigma_j^2(t) &= \frac{a_0^2}{2} [\dot{\psi}(t)]^2 \int_0^\infty P_g(\eta) d\eta + \frac{a_0^2}{2} [\psi(t)]^2 \int_0^\infty \eta^2 P_g(\eta) d\eta \\ \phi_{ff}(t) &= \frac{a_0^2}{2} \psi(t) \dot{\psi}(t) \int_0^\infty P_g(\eta) d\eta = \frac{a_0^2}{2} \psi(t) \dot{\psi}(t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.40)$$

ところで、確率変数 $\eta$ の確率密度関数 $P_g(\eta)$ は本研究においては、図 3.23 のように卓越振動

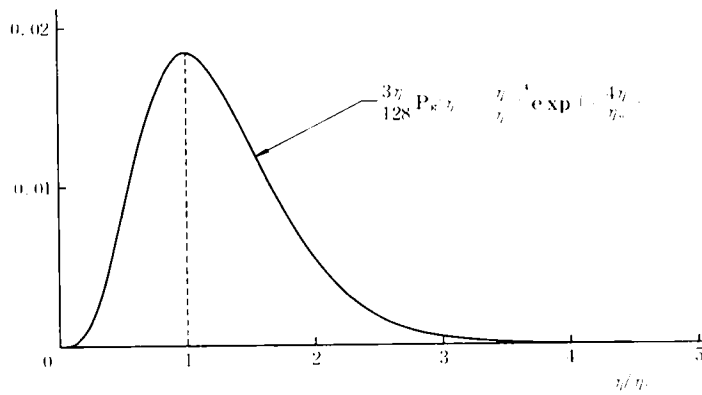


図 3.23 確率密度関数

数  $\eta_p$  (卓越周期  $T_p = 2\pi/\eta_p$ ) を持つ場合を対象にして,

$$P_g(\eta) = \frac{128}{3} \frac{\eta^4}{\eta_p^5} \exp\left(-\frac{4\eta}{\eta_p}\right) \quad \dots\dots\dots (3.41)$$

と正規化されたものを用いることにする。また、定常確率過程  $g(t)$  の式 (3.38) より分るように、非定常確率過程  $f(t)$  の平均値は 0 であるから、この線形応答  $x(t)$  もまたその平均値は 0 である。かくして、応答変位  $x(t)$  の分散  $\sigma_x^2(t)$  は、

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= E\left[\int_0^t w(t-\tau_1) \cdot a_0 \psi(\tau_1) \cos(\eta\tau_1 + \varphi) d\tau_1 \int_0^t w(t-\tau_2) \cdot a_0 \psi(\tau_2) \cos(\eta\tau_2 + \varphi) d\tau_2\right] \\ &= a_0^2 \int_0^t \int_0^t w(t-\tau_1) w(t-\tau_2) \psi(\tau_1) \psi(\tau_2) E[\cos(\eta\tau_1 + \varphi) \cdot \cos(\eta\tau_2 + \varphi)] d\tau_1 d\tau_2 \\ &= a_0^2 \int_0^t \int_0^t w(t-\tau_1) w(t-\tau_2) \psi(\tau_1) \psi(\tau_2) \phi_{gg}(\tau_1, \tau_2) \cdot d\tau_1 d\tau_2 \\ &= a_0^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^t \int_0^t \psi(\tau_1) \psi(\tau_2) w(t-\tau_1) w(t-\tau_2) P_g(\eta) \cdot \cos\eta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta \end{aligned}$$

この式に先に得た単位衝撃応答関数を表わす式 (3.16) あるいは式 (3.18) および形状関数  $\psi(t)$  の式 (3.36) を用いると、応答変位の分散  $\sigma_x^2(t)$ 、応答速度の分散  $\sigma_{\dot{x}}^2(t)$  および両応答値の同時刻における相関係数  $\rho_{\dot{x}x}(t)$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty P_g(\eta) \{ q_c^2(\eta; t) + q_s^2(\eta; t) \} d\eta \\ \sigma_{\dot{x}}^2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty P_g(\eta) \{ \dot{q}_c^2(\eta; t) + \dot{q}_s^2(\eta; t) \} d\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.42)$$

$$\rho_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}}(t) = \frac{1}{2\sigma_{\mathbf{x}}(t)\sigma_{\dot{\mathbf{x}}}(t)} \int_0^\infty P_g(\eta) \left\{ q_c(\eta; t) \dot{q}_c(\eta; t) + q_s(\eta; t) \dot{q}_s(\eta; t) \right\} d\eta \quad \Bigg|$$

このとき

$$\left. \begin{aligned} q_s(\eta; t) &= a_0 \int_0^t \psi(\tau) w(t-\tau) \sin \eta \tau d\tau \\ q_c(\eta; t) &= a_0 \int_0^t \psi(\tau) w(t-\tau) \cos \eta \tau d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.43)$$

であつて、 $\dot{q}_c(\eta; t)$ ,  $\dot{q}_s(\eta; t)$  はそれぞれ  $q_c(\eta; t)$ ,  $q_s(\eta; t)$  の  $t$  に関する微分形である。  
そこで式(3.42)の時間項の積分を遂行すると、以下のように求められる。

i)  $\mu_0(1+\chi) - h_e^2 \geq 0$  のとき：

$$\begin{aligned} q_s(\eta; t) &= \frac{a_0 t p}{2\omega_1} \left[ \alpha' e^{(1-s_1)t^*} \left\{ I_c(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*; t^*) - I_c(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. ; t^*) \right\} + A\beta' e^{(1-s_1)t^*} \left\{ I_c(z_1-1, \eta^*+z_2, -s_2t+\delta_1; t^*) - I_c(s_1-1, \eta^*-s_2, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. s_2t^*-\delta_1; t^*) \right\} + B\beta' e^{(1-z_1)t^*} \left\{ I_c(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2t-\delta_2; t^*) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I_c(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2t+\delta_2; t^*) \right\} \right] \\ q_c(\eta; t) &= \frac{a_0 t p}{2\omega_1} \left[ \alpha' e^{(1-s_1)t^*} \left\{ I_s(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*; t^*) - I_s(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*; t^*) \right\} \right. \\ &\quad \left. + A\beta' e^{(1-s_1)t^*} \left\{ I_s(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*-\delta_1; t^*) - I_s(s_1-1, \eta^*+s_2, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -s_2t^*+\delta_1; t^*) \right\} - B\beta' e^{(1-z_1)t^*} \left\{ I_s(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2t^*+\delta_2; t^*) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I_s(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2t^*-\delta_2; t^*) \right\} \right] \\ \dot{q}_s(\eta; t) &= -\frac{a_0 t p}{2\omega_1} \left[ \alpha' \sqrt{\Delta_1^2 + \omega_1^2} e^{(1-s_1)t^*} \left\{ I_c(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*+\varphi_1; t^*) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I_c(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*-\varphi_1; t^*) \right\} \right. \\ &\quad \left. + A\beta' \sqrt{\Delta_1^2 + \omega_1^2} e^{(1-s_1)t^*} \left\{ I_c(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*+\delta_1+\varphi_1; t^*) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I_c(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*-\delta_1-\varphi_1; t^*) \right\} \right. \\ &\quad \left. + B\beta' \omega_g e^{(1-z_1)t^*} \left\{ I_c(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2t^*-\delta_2+\varphi_2; t^*) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -I_c(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^*+\delta_2-\varphi_2; t^*)\} \\
\dot{q}_c(\eta; t) = & -\frac{a_0 t_p}{2\omega_1} \left[ \alpha' \sqrt{\Delta_1^2 + \omega_1^2} e^{(1-s_1)t^*} \{ I_s(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2 t^*-\varphi_1; t^*) \right. \\
& - I_s(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2 t^*+\varphi_1; t^*) \} \\
& + A\beta' \sqrt{\Delta_1^2 + \omega_1^2} e^{(1-s_1)t^*} \{ I_s(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2 t^*-\delta_1-\varphi_1; t^*) \\
& - I_s(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2 t^*+\delta_1+\varphi_1; t^*) \} \\
& + B\beta' \omega_g e^{(1-z_1)t^*} \{ I_s(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^*+\delta_2-\varphi_2; t^*) \\
& \left. - I_s(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2 t^*-\delta_2+\varphi_2; t^*) \} \right]
\end{aligned}
\tag{3.44}$$

ii)  $\mu_0(1+\chi) - h_e^2 < 0$  のとき :

$$\begin{aligned}
q_s(\eta; t) = & \frac{a_0 t_p}{2\omega_1'} \left[ \alpha' \{ e^{(1-(s_1-s_2)t^*)} I_s(s_1-s_2-1, \eta^*, 0; t^*) - e^{(1-(s_1+s_2)t^*)} \right. \\
& I_s(s_1+s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \} \\
& + C\beta' e^{(1-z_1)t^*} \{ I_c(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2 t^*+\delta_1'; t^*) \\
& \left. - I_c(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^*-\delta_1'; t^*) \} \right] \\
q_c(\eta; t) = & \frac{a_0 t_p}{2\omega_1'} \left[ \alpha' \{ e^{(1-(s_1-s_2)t^*)} I_c(s_1-s_2-1, \eta^*, 0; t^*) - e^{(1-(s_1+s_2)t^*)} \right. \\
& I_c(s_1+s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \} \\
& + C\beta' e^{(1-z_1)t^*} \{ I_s(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^*-\delta_1'; t^*) \\
& \left. - I_s(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2 t^*+\delta_1'+\varphi_2; t^*) \} \right] \\
\dot{q}_s(\eta; t) = & -\frac{a_0 t_p}{2\omega_1'} \left[ \alpha' (\Delta_1 - \omega_1') e^{(1-(s_1-s_2)t^*)} I_c(s_1-s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \right. \\
& - \alpha' (\Delta_1 + \omega_1') e^{(1-(s_1+s_2)t^*)} I_c(s_1+s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \\
& + C\beta' \omega_g e^{(1-z_1)t^*} \{ I_s(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^*-\delta_1-\varphi_2; t^*) \\
& \left. - I_s(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2 t^*+\delta_1+\varphi_2; t^*) \} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_c(\eta; t) = & -\frac{a_0 t_p}{2 \omega'_1} \left[ \alpha'(\Delta_1 - \omega'_1) e^{(1-(s_1-s_2)t^*)} I_s(s_1-s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \right. \\
& - \alpha'(\Delta_1 + \omega'_1) e^{(1-(s_1+s_2)t^*)} I_s(s_1+s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \\
& + C \beta' \omega_g e^{(1-z_1 t^*)} \{ I_c(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2 t^* + \delta_1 + \varphi_2; t^*) \\
& \left. - I_c(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^* - \delta_1 - \varphi_2; t^*) \} \right]
\end{aligned}
\tag{3.45}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
I_s(a, b, c; t) &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \left[ e^{at} \left[ \{ a(a^2+b^2)t - (a^2-b^2)\sin(bt+c) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - b\{ (a^2+b^2)t - 2a \} \cos(bt+c) \} + (a^2-b^2)\sin c - 2ab \cos c \right] \right. \\
I_c(a, b, c; t) &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \left[ e^{at} \left[ b\{ (a^2+b^2)t - 2a \} \sin(bt+c) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \{ a(a^2+b^2)t - (a^2-b^2) \} \cos(bt+c) \} + 2ab \sin c + (a^2-b^2)\cos c \right] \right]
\end{aligned}
\tag{3.46}$$

および

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\omega_g \omega_2}{\left[ \{ (\Delta_1 - \Delta_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \} \{ (\Delta_1 - \Delta_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \} \right]^{1/2}}, & B &= \frac{\omega_1}{\omega_2} A \\
C &= \frac{\omega_g^2 \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)}{\left[ \{ (\Delta_1 - \Delta_2 - \omega'_1)^2 + \omega_2^2 \} \{ (\Delta_1 - \Delta_2 + \omega'_1)^2 + \omega_2^2 \} \right]^{1/2}}, & t^* &= \frac{t}{t_p}, \\
\eta^* &= \frac{\eta}{\eta_p}, & s_1 &= \Delta_1 t_p, \quad s_2 = \omega_1 t_p, \quad z_2 = \omega_2 t_p, \quad \varphi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\omega_1}{\Delta_1} \right), \quad \varphi_2 = \tan^{-1} \left( \frac{\omega_2}{\Delta_2} \right)
\end{aligned}
\tag{3.47}$$

### 3.5.2 非定常応答に関する数値計算結果とその考察

楕円形地中構造物の単位衝撃応答関数に関する諸定数・係数に関しては 3.4.2 の過渡応答の場合の数値計算例と同様な値を用い、さらに、図中の文字 Minor および Major は前記と同様にそれぞれ楕円断面の短軸および長軸方向の振動を表わすものとする。したがって過渡応答の場合と同様に、この場合も  $\mu_0(1+\chi) - h_e^2 > 0$  となるので、3.5.1 の j) について検討したもの

である。

図 3.2 4～図 3.2 7 は応答変位・速度の標準偏差の時間変動について図示したものである。そのうち図 3.2 4 は地震動の卓越周期  $T_p$  と表層地盤のせん断 1 次固有周期  $T_g$  との比を 1 とし、かつ入力地震動の形状関数  $\psi(t)$  の最大となるまでの時間  $t_p$  の卓越周期  $T_p$  に対する比を 2 としたときの、応答変位の標準偏差  $\sigma_x(t)$  であるが、楕円断面の短軸方向に振動する場合の方が長軸方向に振動する場合より応答は大きく、図 3.5 の周波応答倍率の傾向と一致してい

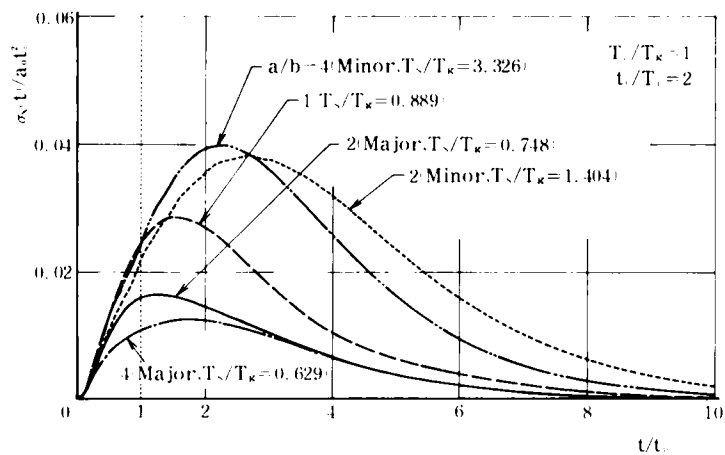


図 3. 24 応 答 変 位 の 標 準 偏 差

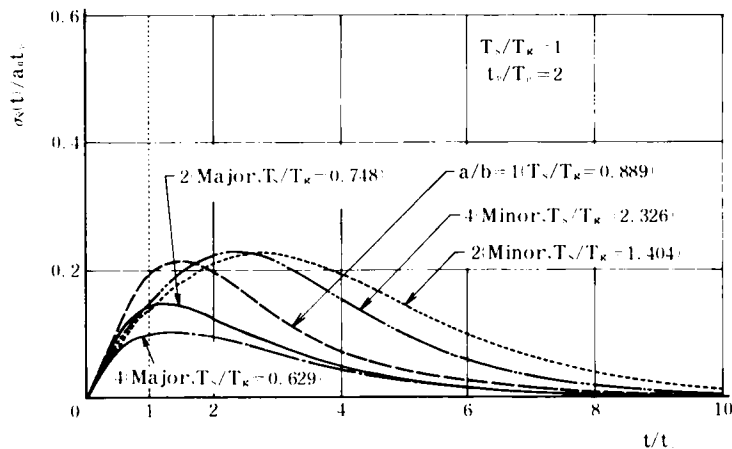


図 3. 25 応 答 速 度 の 標 準 偏 差

ることが分る。さらにまた短軸方向の振動においては応答が入力に対してかなり時間遅れを示しているが、この場合の  $T_p/T_g = 1$  ということは表層地盤の共振の影響を一層強調することになり、短軸方向の振動においては 3.2 において見たように、単位衝撃応答関数  $w(t)$  は表層地盤の動特性が大きく反映しているので、応答は過去のそれ自身の履歴が残留してくることになり、入力に対する応答の追従が遅れる結果が出ているようである。一方長軸方向の振動では  $w(t)$  が表層地盤の動特性の影響をあまり大きく受けなく、かつ最初の  $t = T_g$  前後で応答履歴をいったん遮断する傾向があるため、応答は入力に対して鋭敏に追従しており、このように時間領域における不規則応答がこの系の応答方向による動特性の相異をよく反映していることが知られる。図 3.2 5 は応答速度の標準偏差について図示したものであるが、この場合も地中構造物の断面形および振動方向による応答の傾向は図 3.2 4 の応答変位の標準偏差のそれとほとんど同じであることが示されている。

ところで、応答変位の入力に対する追従性の如何について検討するために、断面の長短径比  $a/b = 2$  の剛楕円柱頂部の水平変位の標準偏差に対して  $t_p/T_p$  および  $T_p/T_g$  の変化について示したのが、それぞれ図 3.2 6 および図 3.2 7 である。前者は地震動の強度最大時間  $t_p$  に対して、その卓越周期  $T_p$  の変動の影響について示したものである。地震動の卓越周期と表層地盤のせん断 1 次の固有周期との比を、 $T_p/T_g = 1$  としているため、短軸方向の振動では入力に対し

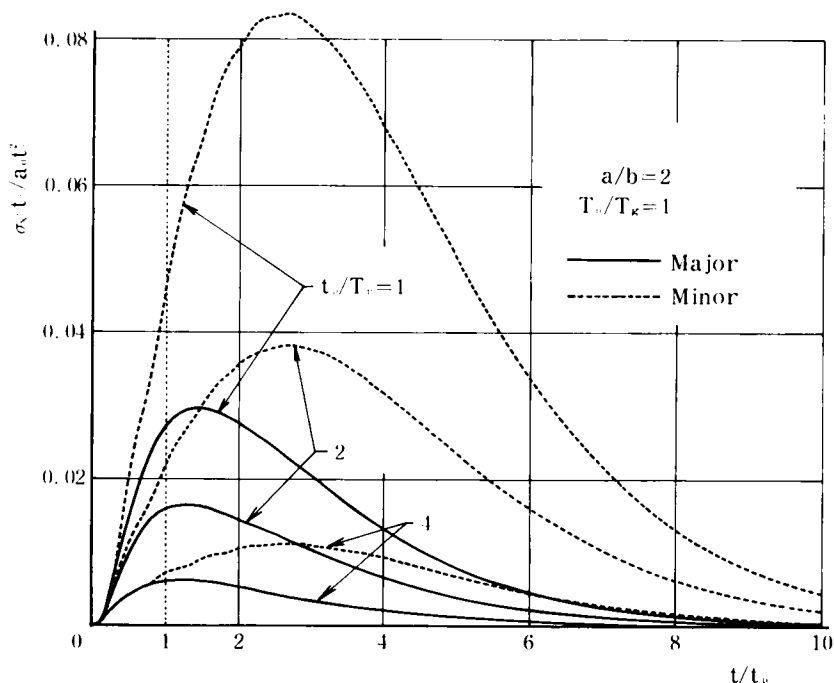


図 3.26 応答変位の標準偏差

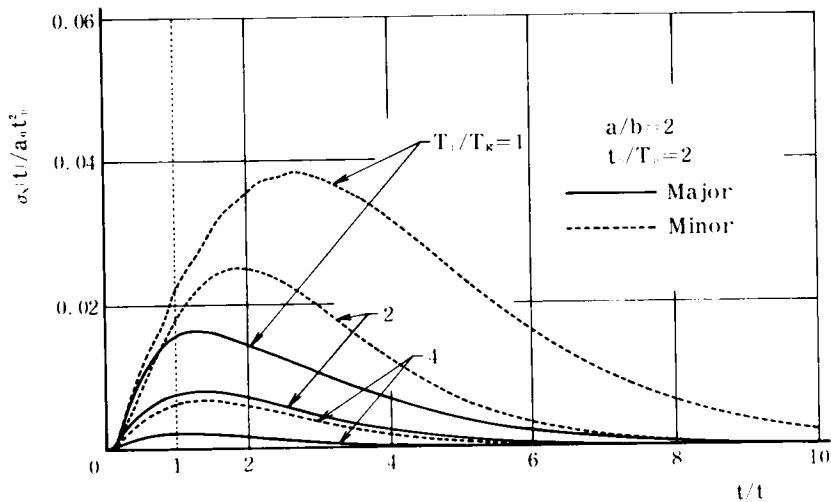


図 3.27 応答変位の標準偏差

て応答は相当遅れているが、長軸方向はそれほど遅れていないのは、上述の理由と同じであろう。このとき卓越周期  $T_p$  の変動に対して、 $t_p/T_p = 1$  すなわち地震動の強度のピークと卓越周期  $T_p$  あるいは表層地盤のせん断 1 次固有周期  $T_g$  との 3 者が一致し、きわめて大きな応答を示しているが、 $t_p$  が  $T_p$  より大なるにつれ応答は急速に縮小し、振動の方向によらずそのピークの時間遅れは、 $t_p/T_p$  の値にほとんど依存しないことが認められる。このことは、式 (3.42) における被積分項  $q_s(\eta; t)$  あるいは  $q_c(\eta; t)$  を表わす式 (3.43) から分るように、これらは単位衝撃応答関数が  $w(t)$  である系にそれぞれ外力  $a_0 \psi(\tau) \sin \eta \tau$  および  $a_0 \psi(\tau) \cos \eta \tau$  が作用するときの系の応答を示しているの、この図 3.26 のように表層地盤の固有周期  $T_g$  と地震動の卓越周期  $T_p$  とが相対的に一定である場合には、系の動特性したがって表層地盤の動特性を内蔵する  $w(t)$  は、応答  $q_s(\eta; t)$  および  $q_c(\eta; t)$  に対して持つ影響力は一定であることから理解される。また  $t_p$  が  $T_p$  に近いほど応答変位の標準偏差  $\sigma_x(t)$  が大きくなるのは、式 (3.42) のように  $\sigma_x(t)$  を求めるのに図 3.22 の形状関数  $\psi(t)$  と図 3.23 の  $\eta$  の確率密度関数  $p_g(\eta)$  とを重ね合わせて積分を行なうので、両関数のピーク ( $t = t_p$  および  $t = T_p = 2\pi/\eta_p$ ) が接近するほど応答値が増大することは容易に理解されよう。ところで解析および図示において  $t_p$  を時間領域共通の尺度として用いているので、 $t_p/T_p$  の増大は卓越周期  $T_p$  の減少を意味するものであり、応答  $x(t)$  の大小は非定常性の 1 つの指標である  $t_p$  と卓越周期  $T_p$  との相対関係に大きく依存していることが分る。そこで、次は逆に  $T_p$  を固定して  $T_g$  を変化させた場合の応答変位の標準偏差の変動について見たのが図 3.27 である。この場合は  $T_g$  が  $T_p$  に接近するということは地震動の卓越周期成分が表層地盤のせん断 1 次固有周期  $T_g$  に近いこ



とを示すものであるから、とくに単位衝撃応答関数  $w(t)$  が表層地盤の動特性をよく反映する短軸方向の振動においては応答の遅れが顕著になってくる様子が図によく示されている。

図 3.28 および図 3.29 は断面  $a/b=2$  の長軸および短軸方向における応答変位と応答速度

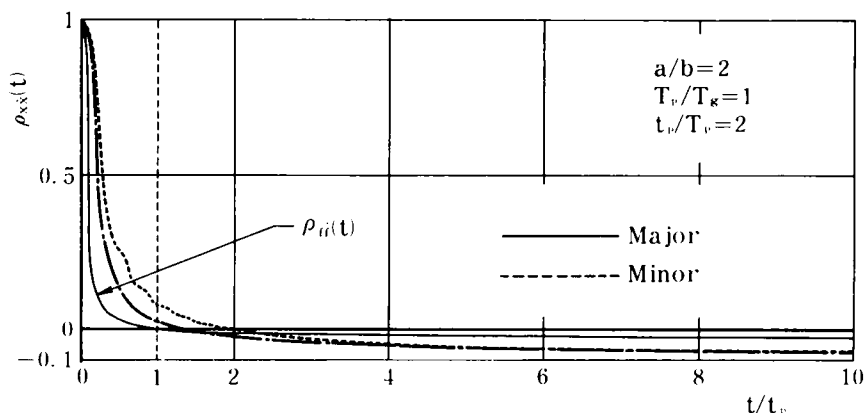


図 3.28 相関係数（応答変位－応答速度）

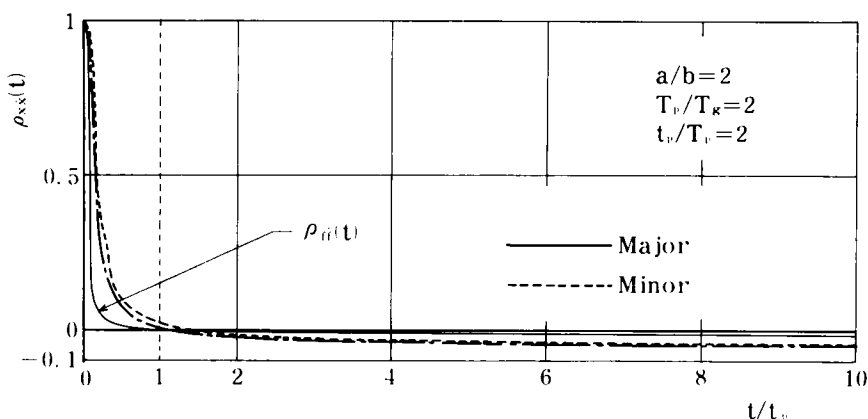


図 3.29 相関係数（応答変位－応答速度）

の同時刻における相関係数  $\rho_{\ddot{x}i}(t)$  およびこれと比較のため入力加速度と入力加加速度との相関係数  $\rho_{\ddot{f}j}(t)$  について図示したものである。両図において  $t_p/T_p=2$  としたとき、 $T_p/T_g$  すなわち、表層地盤のせん断 1 次固有周期  $T_g$  の変動に対する  $\rho_{\ddot{x}i}(t)$  の影響を見ると、前者の図では  $T_p/T_g=1$  のとき、すなわち表層地盤の動特性が強調されるとき、短軸方向における振動では、 $\rho_{\ddot{x}i}(t)$  に表層の影響がわずかながら周期的な変動となって現われているが、長軸方向の振動では逸散減衰効果を大きく受ける動特性のため、ほとんど変動がなく単調に減少し  $\rho_{\ddot{f}j}(t)$  により接近してくるので、それだけ応答の標準偏差の時間変動が入力加速度のそれに似てくることになるが、一方後者の図 3.29 では  $T_p/T_g=2$  となり表層の動特性が強調されないため短軸方向

の振動における応答量の相関の度合は薄れてきて、振動方向による差はほとんどなくなり、応答がより入力に追従しやすくなることを示しているといえよう。

以上のように応答確率量  $x(t)$  の属する確率空間を規定する指標である  $\sigma_x(t)$ ,  $\sigma_{\dot{x}}(t)$  および  $\rho_{x\dot{x}}(t)$  等について考察してきたが、これらだけから応答の量的評価を下すのには不充分である。そこでまず応答  $x(t)$  の絶対値が単位時間当りに設定レベル  $A$  を外向きに超える割合  $m(A; t)$  を図 3.30 ～図 3.32 に示した。図 3.30 では、断面が  $a/b=2$  の場合の長・短軸方向の応答の

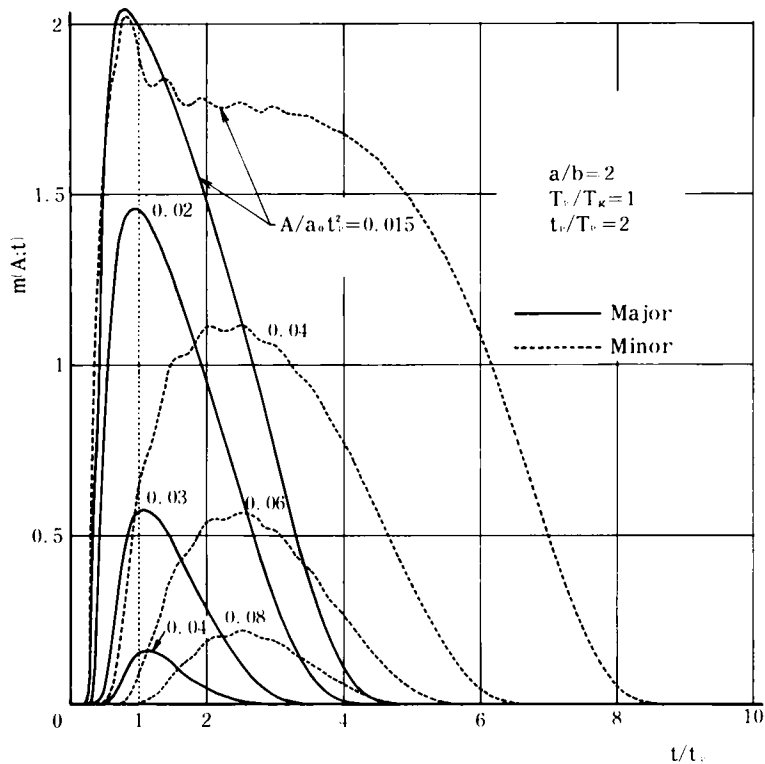


図 3.30 単位時間当りのレベル超過率

レベル超過率が、無次元設定レベル  $A/a_0 t_0^2$  の変化に対して受ける影響を図示したものであるが、図 3.24 より  $a/b=2$  の場合は短軸・長軸方向の応答変位量は 2 倍以上の差があるにもかかわらず、レベルを  $A/a_0 t_0^2 = 0.015$  くらいに低く設定すると、両方向の単位時間当りの超過率  $m(A; t)$  はほぼ同じ程度かやや長軸方向の振動時の方が大きく出ているようである。これは始動時には応答振幅は小さいけれども、長軸方向の振動では構造物の固有円振動数  $\omega_s$  が  $\omega_s/\omega_g = 1.337$  に対して短軸方向のそれは  $\omega_s/\omega_g = 0.712$  と低く、かつその  $\omega_s$  による共振の影響は小さいので、長軸方向の振動では高周波成分を選択するためにこのような現象が生じるもの

と思われる。しかしながら、その実現される期間は長軸方向の振動では短いのに比して、短軸方向の振動では非常に長く続く特徴がある。また設定レベル  $A/a_0 t_p^2$  がそれより増大するにつれて、短軸方向の超過率が長軸方向の振動の場合の  $m(A; t)$  を急速に凌ぐことが分る。さて図 3.3 1 は地震動の強度最大までの時間  $t_p$  と卓越周期  $T_p$  との関係が、断面  $a/b = 2$  の地中構

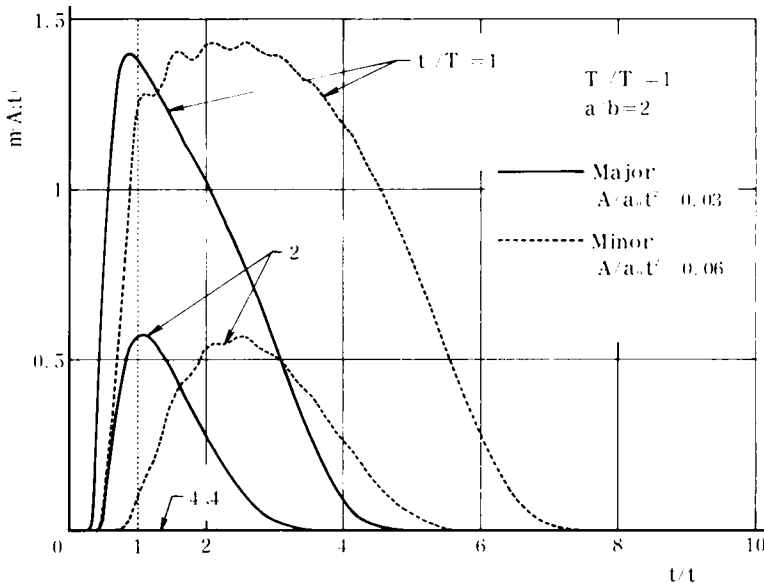


図 3.31 単位時間当りのレベル超過率

造物の単位時間当りのレベル超過率  $m(A; t)$  に及ぼす影響を示したものである。長・短軸方向の振動における設定レベルをおのおの  $A/a_0 t_p^2 = 0.03$  および  $0.06$  としたときの超過率  $m(A; t)$  は、短軸方向の振動ではそのピークは入力地震動のそれと比べてかなり遅れているのに反し、長軸方向はほぼ  $t = t_p$  でピークに達することが分るが、さらに  $t_p$  と  $T_p$  との相対関係が変化してもピークの位置はほとんどずれないのは、先述の図 3.2 6 の傾向とよく一致しており、地中構造物の動特性が集約された  $u(t)$  の特徴がこの超過率  $m(A; t)$  にも反映していることを知る。このように超過率  $m(A; t)$  も非定常性の指標  $t_p$  と地震動の卓越周期  $T_p$  との相対関係に大きく影響されることが分る。

一方図 3.3 2 は超過率  $m(A; t)$  の  $T_p/T_g$  への依存性を図示したものであるが、長・短軸方向の振動における設定レベルを固定しておく、卓越周期  $T_p$  が表層地盤のせん断 1 次の固有周期  $T_g$  に近いほど単位時間当りの超過率  $m(A; t)$  は大きく、図 3.2 7 の応答変位  $x(t)$  の標準偏差の傾向と合致しているが、短軸方向の振動において  $T_p/T_g = 1$  および 2 の場合とでは、 $m(A; t)$  は後者が若干小さいだけでほとんど同じ大きさであることは図 3.2 7 における短軸方向の振動の応答変位の標準偏差が  $T_p/T_g$  に対して示す傾向とは必ずしも一致していない。この

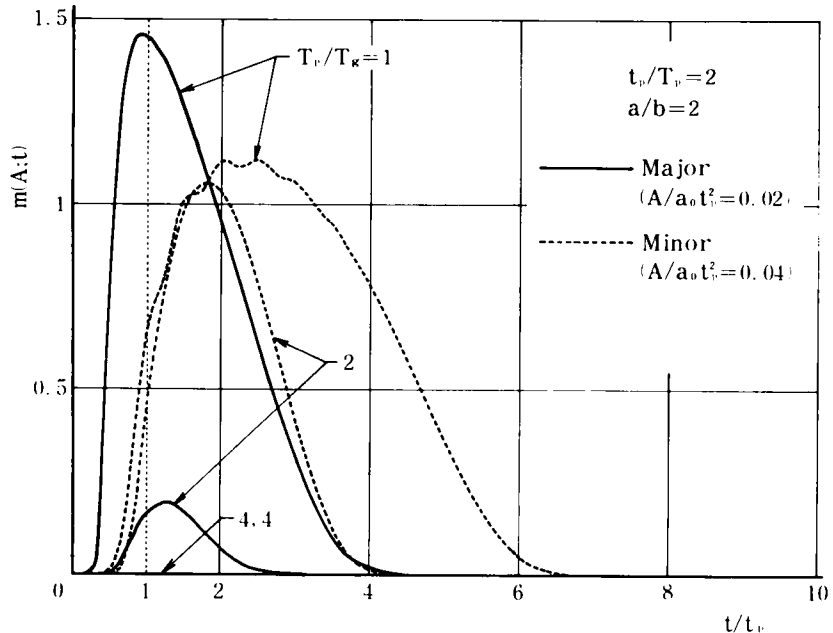


図 3.32 単位時間当りのレベル超過率

ように、不規則応答を評価する一方法である変位レベル超過回数は、その重要な確率パラメーターである応答変位の標準偏差のみからは推測しにくく、応答速度の標準偏差の傾向をも合わせ考慮する必要のあることを示しているといえよう。

瞬間的に設定レベルを越える割合については上記のような傾向が得られたが、個々の地震動はごく限られた時間内での現象であるから、この経続時間  $t$  までにレベル  $A$  をくり返し越える回数の期待値または平均超過回数  $M(A; t)$  もまた応答量が持つ破壊力の如何を量的に把握する目安となる。図 3.33～図 3.35 は、地震動の経過時間  $t$  とそれまでに設定レベル  $A$  を越える回数の期待値  $M(A; t)$  について示しているが、そのうち図 3.33 は  $a/b=2$  の楕円断面構造物が長・短軸方向に振動するときの  $M(A; t)$  を経過時間  $t$  に対して示したものである。式 (3.26) の説明で述べたように、この期待値  $M(A; t)$  は設定レベル  $A$  が大きいときはこれを越える現象はまれとなり、 $[0, t]$  でレベル  $A$  を越す確率とも考えられるので、ここでは  $M(A; t)$  が 1 以下の部分のみについて図示してある。この図は図 3.30 に対応するものであるが、設定レベル  $A/a_0 t_p^2$  が、長軸方向の振動のとき 0.03、短軸方向の振動のとき 0.06 では、瞬間的超過率  $m(A; t)$  の最大値は両者についてほぼ等しい (図 3.30 より) にもかかわらず、このように超過回数の期待値  $M(A; t)$  が大幅に異なるのは、同じ入力を受けても短軸方向の応答が長軸方向のそれに比べて息が長いことを示しているわけである。またこの  $M(A; t)$  が一定値に落着く時点が非定常応答  $x(t)$  の強度が最大となる時刻を示しているので、入力地震動に対する

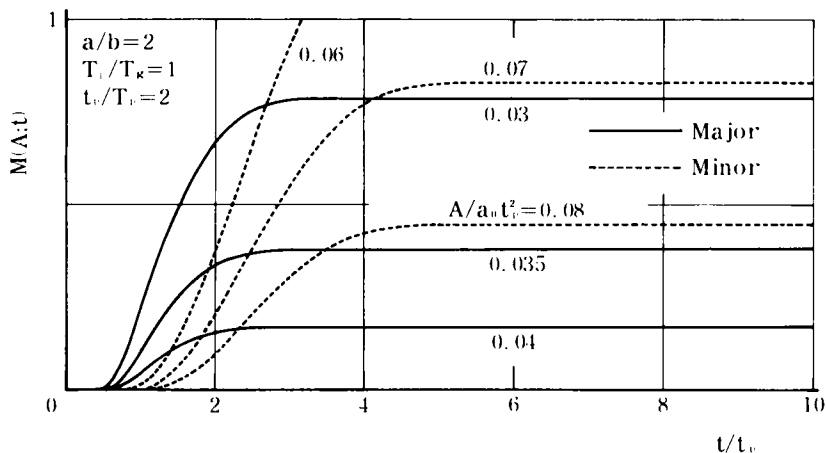


図 3.33 平均超過回数と経過時間との関係

追従性の情報をも同時に持っていることが分る。図 3.34 は長軸方向および短軸方向の振動における設定レベル  $A/a_0 t_p^2$  をそれぞれ 0.03 および 0.06 とするとき、卓越周期  $T_p$  の変動に対する超過回数の期待値  $M(A; t)$  を示しているが、比  $t_p/T_p$  に非常に鋭敏に反応する量であることがわかる。また前出の図 3.24 の応答変位の標準偏差  $\sigma_x(t)$  で、断面が  $a/b=2$  の短軸および長軸方向の振動におけるそれらの最大値の比は、ほぼ 2 であるから、それぞれの振動方向における設定レベルを  $A/a_0 t_p^2 = 0.06$  および 0.03 と 2 倍に設定した場合を考えると、図 3.34 の  $t_p/T_p=2$  に対して地震動のピーク ( $t=t_p$ ) より短軸方向のピークはかなり遅れるので、この図の超過回数の期待値  $M(A; t)$  は初期の段階では長軸方向における  $M(A; t)$  の方が大きく

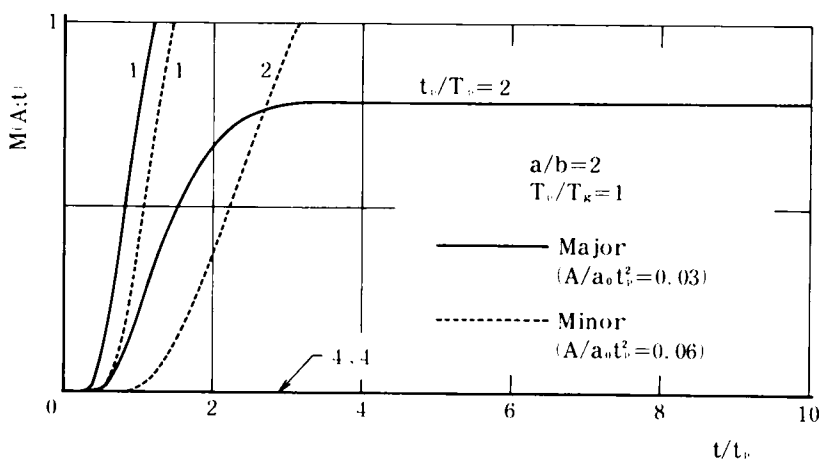


図 3.34 平均超過回数と経過時間との関係

なっているが、一定時刻後は短軸方向の  $M(A; t)$  の方がはるかに大きくなることを示している。一方図 3.35 は図 3.34 と同様の理由により設定レベル  $A/a_0 t_p^2$  を短軸および長軸方向の振動

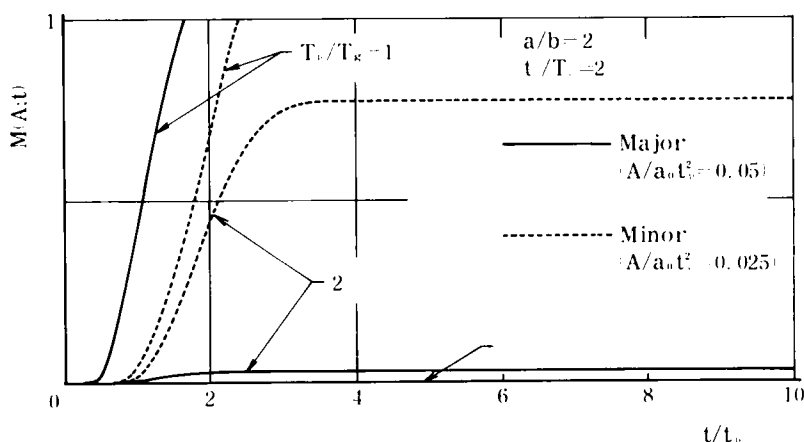


図 3.35 平均超過回数と経過時間との関係

についてそれぞれ 0.05 および 0.025 とその比が 2 となる場合において、地震動の卓越周期  $T_p$  と表層地盤のせん断 1 次の固有周期  $T_g$  との比の変化が超過回数  $M(A; t)$  に及ぼす影響について図示したものである。 $T_p/T_g = 1$  の場合は両振動方向とも超過回数の期待値  $M(A; t)$  は急速に  $t$  とともに増大し、特に長軸方向の振動の場合に著しいが、 $T_p/T_g = 2$  になると長軸方向の振動の  $M(A; t)$  は急激に減少することを示している。この現象は図 3.26, 3.27 でなされた説明と同様に、長軸方向の振動ではその固有周期  $T_s$  が  $T_s/T_g = 0.748$  であるから、それより入力地震動の卓越周期  $T_p/T_g$  が遠ざかるにつれて、構造物の長軸方向の動特性に合致するような地震動の有効周波数成分が減少することを意味するわけであり、構造物の短軸方向の振動ではその固有周期は  $T_s/T_g = 1.404$  であって依然として  $T_p/T_g = 2$  に近いため、 $T_p/T_g = 2$  の場合でも地震動の卓越周波数の周辺周波数が短軸方向の動特性に有効に作用している結果と解釈されよう。このように比  $T_p/T_g$  の如何は地中構造物の動特性と密接な関係にあり、 $t_p/T_p$  と同様にこの平均超過回数  $M(A; t)$  は  $T_p/T_g$  の内容を鋭敏に反映することを示している。

さてこれまでの数値計算例の検討がすべて時間領域における、応答確率量およびその評価量の入力地震動に対する追従性に関するものであったが、図 3.36 ~ 図 3.38 は非常地震動が来襲してから終息するまでに設定レベルを超過する回数の期待値  $M(A; t)$  について示したものである。図 3.36 は種々の断面の地中構造物が、その長・短径方向に振動する場合の超過回数  $M(A; t)$  の設定レベル  $A/a_0 t_p^2$  への依存度を示すもので、図 3.24 のように各断面・各振動方向により応答量の大きさが異なるので、各場合の  $M(A; t)$  は同一設定レベルに対して当然異なるが、これら応答量および図 3.5 の周波数領域での動特性の大小関係とはよく対応しているこ

とが分る。また図 3.36 は、長軸方向の振動においては、応答変位が設定レベル  $A/a_0 t_p^2 = 0.05 \sim 0.06$  以上のレベルを超過する可能性はほとんど存在しないことを示しており、この設定レベルの限界値は図 3.24 よりも分るようにほぼ  $3\sigma_x(t)$  となっているので、統計論的にも容認しうる結果であろう。しかるに、同図の短軸方向の振動において設定レベルが  $A/a_0 t_p^2 < 0.09$  では断面が  $a/b=4$  の構造物の方が  $a/b=2$  の場合より超過回数  $M(A;T)$  が小さいのは、図 3.24 の応答変位の標準偏差  $\sigma_x(t)$  の最大値の周辺では、断面が  $a/b=4$  の構造物の応答変位の方が  $a/b=2$  の場合より大きい、応答レベルの低いところではこれを超過している時間はむしろ  $a/b=2$  の方が長いために、上記のような現象が生じていると説明されよう。このように、周波数応答の大小関係のみからは不規則応答における評価をしにくい場合も存在し、この点に充分の留意がなされるべきであろう。

図 3.37 は  $a/b=2$  の断面の楕円柱が長軸・短軸方向に振動する際の、平均超過回数  $M(A; t)$  と  $t_p/T_p$  との関連について示しているが、この場合  $T_p/T_g=1$  としているので、構造物の動特性が強調される状態にある。地震動の強度の最大時刻  $t_p$  と卓越周期  $T_p$  との比  $t_p/T_p$  が増大するにつれて、両方向の振動ともにその一定レベルに対する超過回数は急速に減少し、特に短軸方向におけるその傾向は顕著である。このように一定の  $t_p$  に対しては入力地震動の卓越周期  $T_p$  が減少、すなわち卓越振動数  $\eta_p$  の増大を意味するので、応答は高周波数成分を強調されることになり、かつまた図 3.26 のように  $t_p/T_p$  の増大につれて応答のピークは低下するが、応答は長くまで持続するので設定レベルの若干の変動に対しても超過回数  $M(A;T)$  は非常に敏感に反応することが分る。一方図 3.38 は同様の構造物に対して、 $t_p/T_p=2$  と固定して、表層地盤のせん断 1 次の固有周期  $T_g$  と地震動の卓越周期  $T_p$  との相対関係の変動に対する  $M(A;T)$  の影響を図示したものである。 $T_p/T_g=1$  の場合は上述のように、地震動の卓越周波数成分が構造物の動特性に有効に作用するので、当然応答は大きく  $M(A;T)$  も大きい、図 3.37 の場合と同様に両周期が互に離反するにつれて応答は減少し、低設定レベルにおいて  $M(A;T)$  が急変するのは、図 3.37 と同様の理由によるものである。

次に図 3.39～図 3.41 に掲げたのは、応答変位が設定レベルを超過する確率分布を示しており、破壊確率分布とも呼ばれるものである。まず図 3.39 における超過確率分布  $\bar{P}(A;T)$  は図 3.36 の平均超過回数  $M(A;T)$  に対応するものであって、先述のごとく超過が希な現象である場合、すなわち応答に比して設定レベルが高い場合は  $\bar{P}(A;T)$  と  $M(A;T)$  とが相接近することが分る。また各断面の構造物が長・短軸方向に振動する際の  $M(A;T)$  と動特性との対応が、全くそのままこの超過確率分布  $\bar{P}(A;T)$  にも投影されているので、不規則応答の評価する方法としてはほぼ同程度の内容を持つものと解してもよからう。図 3.40 はこの超過確率分布

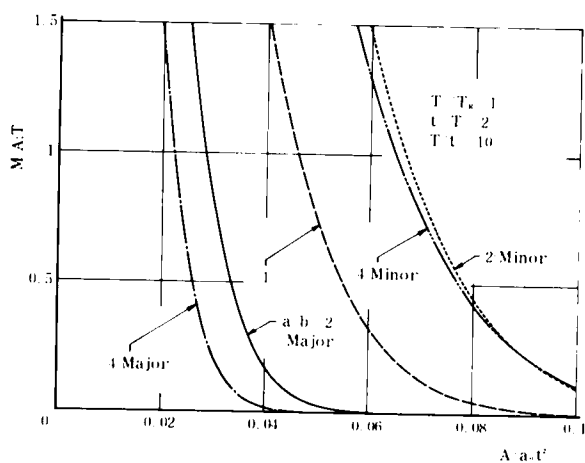


図 3.36 平均超過回数とレベルとの関係

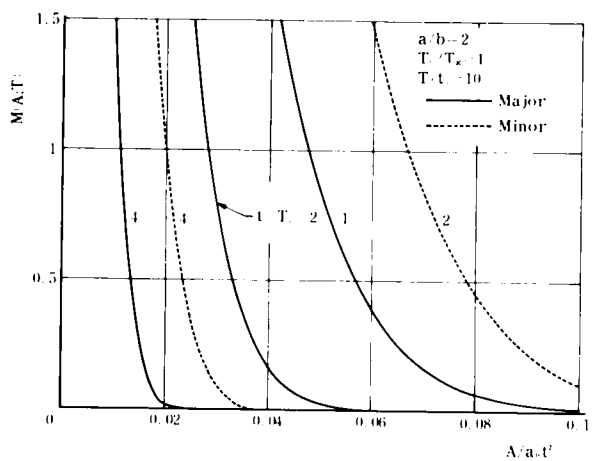


図 3.37 平均超過回数とレベルとの関係

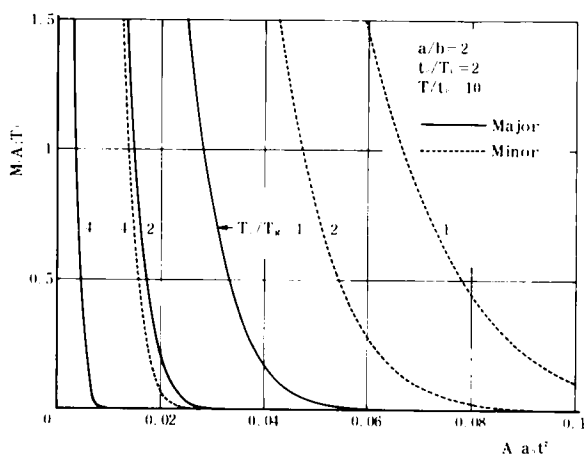


図 3.38 平均超過回数とレベルとの関係



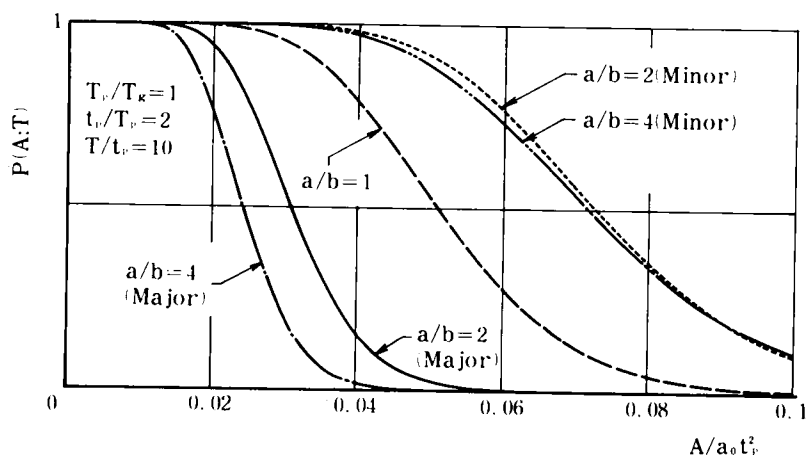


图 3.39 超過確率分布

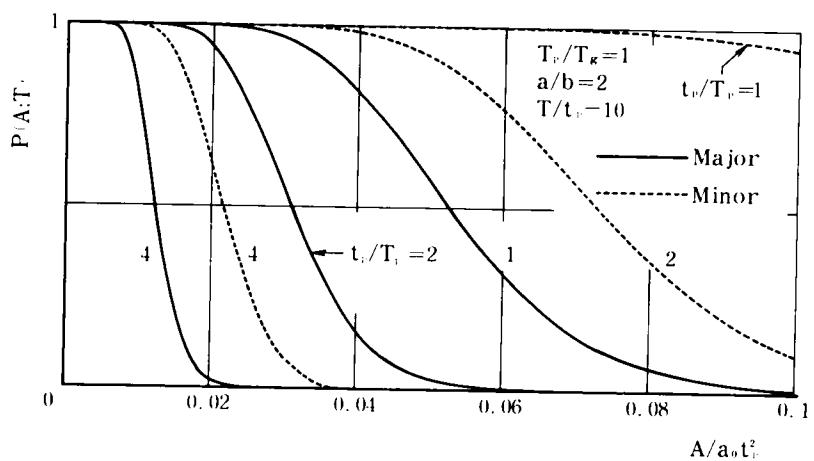


图 3.40 超過確率分布

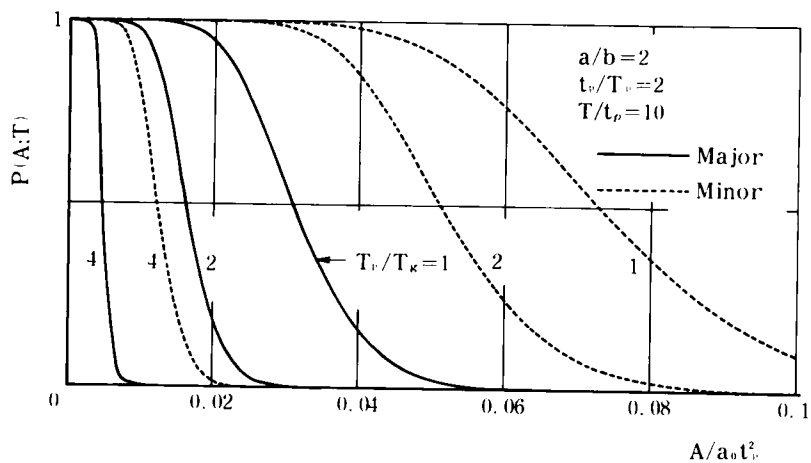


图 3.41 超過確率分布

$\bar{P}(A;T)$ が  $t_p/T_p$  の変動による影響を示したものであるが、応答設定レベルが、図 3.2 6 を参照して応答変位の標準偏差の最大値のほぼ 3 倍、 $3\sigma_x(t)$  の値になると超過する確率は 0 となることを示しているが、これは図 3.3 7 で見た傾向と全く同様であることを知る。一方図 3.4 1 では地震動の卓越周期  $T_p$  と表層地盤のせん断 1 次固有周期  $T_g$  との相対関係の影響を示しているが、同様に超過する確率の低い場合は  $\bar{P}(A;T) \cong M(A;T)$  であることがよく示されており、 $T_p/T_g = 1$  のように大きな応答量においては、設定レベルの低い範囲で両評価法の食い違いが大きくなるようである。このように、応答設定レベルが応答変位の標準偏差の最大値の約 2 倍以上においては、超過確率分布  $\bar{P}(A;T)$  と平均超過回数  $M(A;T)$  とは同一視してもよからう。

### 3.6 結 言

本章では周辺地盤との相互作用を考慮した地中構造物の不規則地震応答について検討を行ってきたが、対象とする振動系は第 2 章の均質な地盤中にある剛な楕円柱の動揺振動系であるので、本章において特に定めるべき定数・係数以外の数値はできるかぎり、第 2 章の周波数応答解析において用いた値をそのまま準用してきた。入力地震動としては平坦なスペクトル構造を持った定常確率過程および単一の卓越周波数を持つ非定常確率過程を対象にし、地中剛構造物の不規則地震応答について論じてきたが、その成果は以下のように要約される。

- (1) 構造物をとりまく半無限弾性地盤との相互作用を考慮して導き出された、楕円断面構造物の動揺振動の近似的単位衝撃応答関数は、短軸方向の振動においては表層地盤の影響を大きく受け、一方長軸方向の振動においては応答履歴をいったん遮断する効果を持つ。
- (2) 静止していた地中構造物が定常確率過程入力を受けるとき、断面の長軸方向の振動では応答は一般に小さく急速に定常に達するが、短軸方向の振動では応答は大きく過渡状態が長引く。
- (3) 設定レベルを単位時間に超過する割合は、レベルが高いときは短軸方向における方が長軸方向のそれよりも多いが、レベルが低くなると長軸方向の振動における方が多くなる。
- (4) 非定常入力を受ける地中構造物の応答確率量は短軸方向の振動では大きく、長軸方向の振動では小さい傾向は周波数応答における傾向と一致している。
- (5) 入力地震動の卓越周期と表層地盤のせん断 1 次固有周期が相接近するほど、入力に対する応答の追従性は悪くなり、短軸方向の振動ほどその傾向は著しい。

- (6) 入力地震動の強度最大までの時間と入力地震動の卓越周期との相対関係は、応答の追従性に関してはほとんど影響を持たない。
- (7) 単位時間当りに非定常応答が設定レベルを超過する割合は、応答変位・応答速度の標準偏差の傾向と同様に、短軸方向の振動の方が長軸方向のそれより大きい、その大小関係は応答変位のそれとは必ずしも対応しない。
- (8) 一定レベルを超過する平均回数と超過確率分布とは、地中構造物の動特性をよく反映する評価法であるが、設定レベルが応答変位の標準偏差のほぼ2倍より大きい範囲では両評価法は同じような結果を与える。

以上が本章における成果の要約であるが、まず本解析の結果に最も大きな影響を与えるのは、この地中構造物系の単位衝撃応答関数であろう。ここでは、周波数領域での複雑さをさけるため簡単な式での置換えを行なって、周波数応答倍率が合うように適当な定数・係数を定めた後、Fourier 逆変換より導き出したが、この単位衝撃応答関数と第2章の理論解との適合性に関しては今後の問題として残された。

## 第 4 章 不均質地盤中にある基礎構造物の周波数応答

### 4.1 概 説

一般には地盤はその形成過程などの要因のために、その地相が場所的に著しく異なることがよく観察されるが、特に構造物の打設される地表面においてその物理特性、その中でも波動の伝播特性が深さとともに急変することがある。このような表層地盤に下方より地震動が来襲するとき、地表面の変位が大きいかかわらず、その構造物に及ぼす地震力は意外に小さい場合も生じ、また第 2 章でも見たように、周辺地盤の構造物に対する影響力は構造物自身の変動に依存する相互作用系であるから、このような地盤の不均質性が当然構造物の運動にも反映してくることになる。

ところでこのような不均質地盤内における地震波の伝播特性に関して深く追求が進められてきたが、<sup>1)</sup> 一方そのような地盤中に埋設された構造物への振動圧分布については、実験的にも容易に観察しうるにもかかわらず、その応答特性をも含めた組織的な研究は、現在までそれほど多くは報告されていない。ところで従来解析においては、地中構造物の断面形を考慮していなかったり、<sup>2)</sup>あるいは地盤に何らかの内部減衰を考慮していないので、耐震工学上問題となる共振時の振幅が有限値とならない場合も生じ<sup>3)</sup> やや現実的でない面も見受けられた。

そこで本章においては、表層地盤としては水平振動のみ許される媒体でその弾性係数および粘性減衰係数が、深さの 1 乗あるいは 2 乗に比例、したがって伝播速度で深さの平方根あるいは 1 乗に比例するものとし、このような不均質地盤中に任意長さの剛あるいは柔な円形断面構造物が打設されているような力学系を解析の対象とした。このような地盤の物理定数が単調になめらかに変化する場合は、この系の固有関数を見出せば結局第 2 章の均質地盤の場合と同様な取扱いができる。その解析の結果は均質地盤の場合と同様に、剛体振動においては表層地盤の動的効果が比較的簡単な表現で与えられ、一方たわみやすい構造物の解析は、複雑ではあるがその固有関数による展開が可能であり、実用的には数個の低次数の固有関数のみを考慮すればよく、その物理現象の理解をより容易にしている。

## 4.2 表層地盤内における波動伝播

ここでは図 4.1 に示すような表層地盤モデルを考え、それは同図のように堅い基盤上に密着して、以下のような仮定を満たすものとする。

- (1) 表層地盤の密度は一定であるが、弾性係数および粘性減衰係数はともに深さの 1 乗あるいは 2 乗に比例して変化する不均質性を共有する等方半無限弾性体とする。
  - (2) 表層地盤内における上下方向の変位は考慮せず、かつ波動の基盤への透過は考えない。
- その他の仮定は第 2 章に準ずるものとする。

### 4.2.1 不均質粘弾性地盤の運動方程式

外乱は基盤面より鉛直上方へ入射するとしたとき、地盤内の各点は同位相で一樣な水平方向（ $x$  方向）の運動を行なうので、その運動方程式は次式のように書ける。

$$\rho \frac{\partial^2 u_G}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_B}{\partial t^2} \quad \cdots \cdots (4.1)$$

ここに、 $u_G$ 、 $u_B$  はそれぞれ表層地盤および基盤の水平変位であって、せん断弾性係数  $\mu(z)$  および粘性減衰係数  $\mu'(z)$  を用いると、地盤内のせん断応力  $\tau_{xz}$  は次式で与えられる。

$$\tau_{xz} = \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_G}{\partial z} \quad \cdots \cdots (4.2)$$

ここで、定常基盤入力

$$u_B = A_0 e^{i\omega t} \quad \cdots \cdots (4.3)$$

に対する表層地盤の定常応答変位  $u_G(z; t)$  を

$$u_G(z; t) = U(z) e^{i\omega t} \quad \cdots \cdots (4.4)$$

とすると、式 (4.1) ~ (4.4) より次式をうる。

$$\frac{d}{dz} \left[ \left( \mu + i\omega\mu' \right) \frac{dU}{dz} \right] + \rho\omega^2 U = -\rho A_0 \omega^2 \quad \cdots \cdots (4.5)$$

そこで、表層地盤のせん断弾性係数  $\mu(z)$  およびせん断ひずみ速度に比例する粘性減衰係数  $\mu'(z)$

が同一の分布形  $r(z)$  を持つものと仮定して

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \mu_0 r(z) \\ \mu'(z) &= \mu'_0 r(z) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

とおく。ただし、座標  $z$  の正の方向は図 4.1 のように鉛直下方であり、 $\mu_0, \mu'_0$  はそれぞれ表層最深部における  $\mu(z), \mu'(z)$  の値である。

これより式 (4.5) は次式のように書き直される。

$$\begin{aligned} \left(1 + i \omega \frac{\mu'_0}{\mu_0}\right) \frac{d}{dz} \left\{ r(z) \frac{dU}{dz} \right\} + \frac{\omega^2}{V_0^2} U \\ = -\frac{\omega^2}{V_0^2} A_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

ここで式 (4.7) を解くのに第 2 章のように、この不均質地盤の固有関数  $Z_m(z)$ , ( $m=1,2,3,\dots$ ) を以下のようにして求める。まず式 (4.1) および式 (4.2) より  $\mu'(z)=0$  かつ  $u_B=0$  とした非減衰自由振動の式として

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left\{ r(z) \frac{dZ_m}{dz} \right\} + \frac{\zeta_m^2}{V_0^2} Z_m = 0, \\ (m=1,2,3,\dots) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

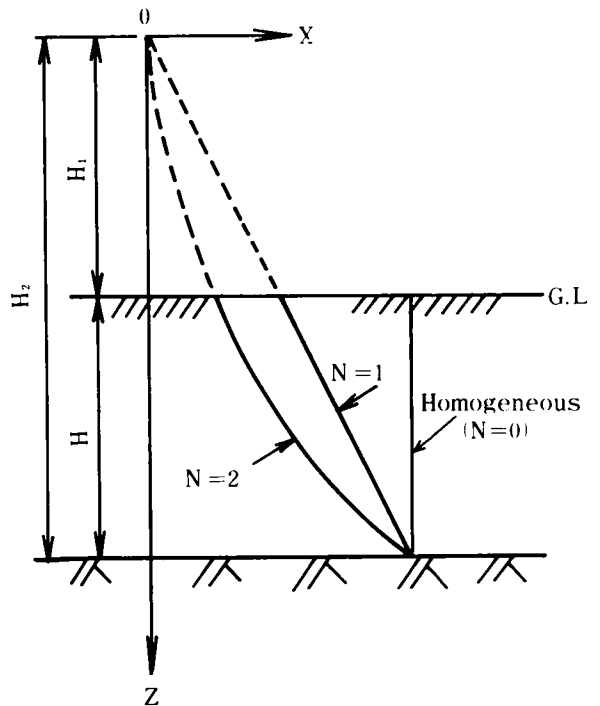


図 4.1 表層地盤における不均質性分布

をうる。ただし  $V_0 = \sqrt{\mu_0/\rho}$  は表層最深部での横波の伝播速度であり、 $\zeta_m$  は表層の第  $m$  次せん断固有円振動数である。

そこで式 (4.6) における分布形  $r(z)$  を

$$r(z) = \left(\frac{z}{H_1}\right)^N, \quad (N=0,1,2: \text{図 4.1 参照}) \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

として、これを式 (4.8) に持込むと、 $N=1,2$  に対して次の 2 式をうる。

$$N=1: \quad \frac{d^2 Z_m}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_m}{dz} + \frac{H_1 \zeta_m^2}{V_0^2} \frac{Z_m}{z} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4.10)$$

$$N=2: \quad \frac{d^2 Z_m}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dZ_m}{dz} + \frac{H_1^2 \zeta_m^2}{V_0^2} \frac{Z_m}{z^2} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4.11)$$

これらの固有関数  $Z_m(z)$  に関する方程式を，境界条件

$$\begin{array}{lcl} z=H_1: & \frac{dZ_m}{dz} = 0 & | \\ z=H_2: & Z_m = 0 & | \end{array} \quad \cdots \cdots \cdots (4.12)$$

に対して解けば，以下のように振動数方程式と固有関数  $Z_m(z)$  の解析表示をうる。

$$N=1: \quad Y_1\left(\frac{2\zeta_m H_1}{V_0}\right) J_0\left(\frac{2\zeta_m \sqrt{H_1 H_2}}{V_0}\right) - J_1\left(\frac{2\zeta_m H_1}{V_0}\right) Y_0\left(\frac{2\zeta_m \sqrt{H_1 H_2}}{V_0}\right) = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4.13)$$

$$Z_m(z) = Y_1\left(\frac{2\zeta_m H_1}{V_0}\right) J_0\left(\frac{2\zeta_m \sqrt{H_1 z}}{V_0}\right) - J_1\left(\frac{2\zeta_m H_1}{V_0}\right) Y_0\left(\frac{2\zeta_m \sqrt{H_1 z}}{V_0}\right) \quad \cdots \cdots \cdots (4.14)$$

および

$$N=2: \quad \sqrt{\frac{4H_1^2 \zeta_m^2}{V_0^2} - 1} + \tan\left\{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4H_1^2 \zeta_m^2}{V_0^2} - 1} \ln\left(\frac{H_2}{H_1}\right)\right\} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4.15)$$

$$\begin{aligned} Z_m(z) = & \frac{1}{\sqrt{z}} \left[ \sin\left\{\sqrt{\frac{4H_1^2 \zeta_m^2}{V_0^2} - 1} \ln\left(\frac{z}{H_1}\right)\right\} \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{4H_1^2 \zeta_m^2}{V_0^2} - 1} \cdot \cos\left\{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4H_1^2 \zeta_m^2}{V_0^2} - 1} \ln\left(\frac{z}{H_1}\right)\right\} \right] \quad \cdots \cdots \cdots (4.16) \end{aligned}$$

ここに， $J_\nu(z)$ ， $Y_\nu(z)$  はそれぞれ  $\nu$  次の第1種および第2種の Bessel 関数であり，振動数方程式の式(4.13)あるいは式(4.15)の正根のうち小さい方より順に  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  と番号を付すものとする。

また当然のことながら， $N=0$  の場合は均質地盤に相当し，第2章の式(2.7)と同じ式

$$Z_m(z) = \cos\left\{\frac{(2m-1)\pi}{2} \frac{z-H_1}{H}\right\} \quad \cdots \cdots \cdots (4.17)$$

$$\zeta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2} \frac{V_0}{H} \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

で与えられる。

このように得られた固有関数  $Z_m(z)$  が  $z$  の領域  $[H_1, H_2]$  で直交関数族を形成するので、この性質を利用して、式 (4.5) から得られる定常振動振幅  $U(z)$  を式 (4.4) に持込むことにより、結局次式をうる。

$$u_G(z; t) = A_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2,m}}{\alpha_{1,m}} \frac{Z_m(z)}{\xi_m^2} \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

ただし、 $\omega_0$  は基準円振動数であつて、以下の置換えがなされている。

$$\left. \begin{aligned} \xi_m^2 &= \left( 1 + i\omega \frac{\mu'_0}{\mu_0} \right) \left( \frac{\zeta_m}{\omega_0} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2, & \alpha_{1,m} &= \int_{H_1}^{H_2} Z_m^2(z) dz, \\ \alpha_{2,m} &= \int_{H_1}^{H_2} Z_m(z) dz \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

ところで第2章の均質地盤の場合にも触れたように、 $\xi_m$  の虚数部は人力の円振動数  $\omega$  の増大とともに単調に増大するので、 $\xi_m$  を分母に含む式 (4.19) の不均質地盤変位  $u_G(z; t)$  は振動数  $\omega$  がこの系の第1次固有円振動数  $\zeta_1$  に近いほど、その共振振幅は大きくなることがわらう。

#### 4.2.2 構造物表面から放射される波動

基盤より入射した波動の一部は円柱構造物表面で散乱され、残りのエネルギーは構造物の振動に費されるが、その際にその構造物表面より波動が表層地盤の四方八方へ放射される。この散乱・放射波に関して、円筒座標で示せば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.21)$$

ここに、 $u, v$  はそれぞれ円筒面  $(r, \theta, z)$  における動径・円周方向の変位であり、各応力は弾性



係数  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  および  $\mu'(z)$  を介して次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \Delta + 2 \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial r}, & \sigma_\theta &= \lambda \Delta + 2 \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), & \tau_{rz} &= \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \tau_{\theta z} &= \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.22)$$

上記の関係式において体積増加による内部減衰は考慮していない。そこで式(4.21)を以下の dilatation (体積増加)  $\Delta$  および rotation (回転)  $\tilde{\omega}_z$  の式

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \tilde{\omega}_z &= \frac{1}{2r} \left\{ \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.23)$$

で書き直すと、次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right] &= \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \\ \mu \nabla^2 \tilde{\omega}_z + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial z} \right] &= \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.24)$$

$$\text{ここに } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

ここで、 $\lambda(z)$  も  $\mu(z)$ ,  $\mu'(z)$  と  $z$  方向に同様な分布形  $r(z)$  に従うものと仮定して

$$\lambda(z) = \lambda_0 r(z) \dots\dots\dots (4.25)$$

とおくと、式(4.24)の両式は時間項  $\exp(i\omega t)$  を省略して、次式のように書き改められる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + 2\mu_0) r(z) \nabla^2 \Delta + (\mu_0 + i\omega\mu'_0) \frac{\partial}{\partial z} \left[ r(z) \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right] + \rho\omega^2 \Delta &= 0 \\ \mu_0 r(z) \nabla^2 \tilde{\omega}_z + (\mu_0 + i\omega\mu'_0) \frac{\partial}{\partial z} \left[ r(z) \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial z} \right] + \rho\omega^2 \tilde{\omega}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.26)$$

ここで第2章におけると同様にして、変位の potential  $\phi_0, \psi_0$  および地盤の固有関数である式 (4.8) を満足する固有関数  $Z_m(z)$  を用いて、変位  $u, v$  を次式のように展開することができる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{r \partial \theta} \right) Z_m(z) \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\partial \phi_0}{r \partial \theta} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) Z_m(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.27)$$

したがって、式 (4.26) はこのとき次式のように変形される。

$$\left. \begin{aligned} V^2 \phi_0 - \frac{\alpha_{1,m}}{\alpha_{3,m}} \left\{ \left( 1 + i \omega \frac{\mu'_0}{\mu_0} \right) \frac{\zeta_m^2}{V_L^2} - \frac{\omega^2}{V_L^2} \right\} \phi_0 &= 0 \\ V^2 \psi_0 - \frac{\alpha_{1,m}}{\alpha_{3,m}} \left\{ \left( 1 + i \omega \frac{\mu'_0}{\mu_0} \right) \frac{\zeta_m^2}{V_T^2} - \frac{\omega^2}{V_T^2} \right\} \psi_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.28)$$

ただし、 $V_L, V_T$  (表層地盤の最深部における縦波、横波の伝播速度) および  $\alpha_{3,m}$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} V_L &= \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}}, \quad V_T = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = V_0 \\ \alpha_{3,m} &= \int_{H_1}^{H_2} \gamma(z) Z_m^2(z) dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.29)$$

そこで基準円振動数  $\omega_0$  を用いて

$$h = \frac{\omega_0}{V_L} \sqrt{\frac{\alpha_{1,m}}{\alpha_{3,m}}} \xi_m, \quad k = \frac{\omega_0}{V_T} \sqrt{\frac{\alpha_{1,m}}{\alpha_{3,m}}} \xi_m, \quad (\xi_m: \text{式 (4.20) 参照}) \dots\dots\dots (4.30)$$

とおくと、以後は第2章の場合と同様にして、構造物表面での散乱・放射による表層地盤内の変位  $u, v$  として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{mn} \frac{\partial K_n(hr)}{\partial r} + B_{mn} \frac{K_n(kr)}{r} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} Z_m(z) e^{i\omega t} \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{mn} \frac{K_n(hr)}{r} + B_{mn} \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} \right] \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} Z_m(z) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.31)$$

ここに、 $K_n(hr)$  は  $n$  次の第 2 種変形 Bessel 関数であり、粘性減衰が存在する限り、その argument は複素数となるので、 $K_n(hr)$  も argument の絶対値の増加とともに減衰振動形となる。それゆえ加振点より波動が無限遠方に逸散し、遂には消滅することを表わす関数である。さらに  $A_{mn}$ 、 $B_{mn}$  は積分定数であり、これらは構造物の変位と地盤の変位との連続条件より定められる。なおこの場合断面自身の変形は考えないので、 $n=1$  である。

#### 4.2.3 地中構造物に作用する地震力

地震動が  $x$  軸方向に作用しているとすると、構造物も同様に  $x$  軸方向に振動することになり、構造物の任意点の基盤に対する相対水平変位を  $\eta(z; t) = \eta_0(z) \exp(i\omega t)$  と表わすと、断面の動径および接線方向の変位  $u_s$ 、 $v_s$  は表層地盤の固有関数  $Z_m(z)$  を用いて

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \eta(z; t) \cos \theta = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos \theta \cdot Z_m(z) e^{i\omega t} \\ v_s &= -\eta(z; t) \sin \theta = -\sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin \theta \cdot Z_m(z) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.32)$$

と展開される。ただし

$$D_m = \frac{\int_{H_1}^{H_2} \eta_0(z) Z_m(z) dz}{\int_{H_1}^{H_2} Z_m^2(z) dz} = \frac{1}{\alpha_{1,m}} \int_{H_1}^{H_2} \eta_0(z) Z_m(z) dz \dots\dots\dots (4.33)$$

これより、第 2 章の式 (2.33) のように、構造物の表面 ( $r=a$ ) での、式 (4.19) の入射波と式 (4.31) の散乱・放射波の和で表わされる表層地盤の変位が、式 (4.32) の構造物の変位と一致すべきことから、積分定数  $A_{mn}$ 、 $B_{mn}$  は  $n=1$  のときのみ 0 でない値をとり、それらは次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_{m1} &= \left\{ D_m - \frac{\alpha_{2,m}}{\alpha_{1,m}} \frac{A_0}{\xi_m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \frac{\frac{\partial K_1(ka)}{\partial a} - \frac{K_1(ka)}{a}}{\frac{\partial K_1(ha)}{\partial a} \frac{\partial K_1(ka)}{\partial a} - \frac{K_1(ha)}{a} \frac{K_1(ka)}{a}} \\ B_{m1} &= \left\{ D_m - \frac{\alpha_{2,m}}{\alpha_{1,m}} \frac{A_0}{\xi_m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \frac{\frac{\partial K_1(ha)}{\partial a} - \frac{K_1(ha)}{a}}{\frac{\partial K_1(ha)}{\partial a} \frac{\partial K_1(ka)}{\partial a} - \frac{K_1(ha)}{a} \frac{K_1(ka)}{a}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.34)$$

このとき、構造物に作用する単位長さ当りの振動圧  $p(z; t)$  は

$$p(z; t) = 4 \int_0^{\pi/2} [\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta]_{r=a} a d\theta$$

を計算すればよいが、式 (4.22), (4.31) および式 (4.34) を用いて次のような解析表示が得られる。

$$\begin{aligned} p(z; t) &= \rho \pi a \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_{m1} K_1(ha) + B_{m1} K_1(ka) \right] \frac{\alpha_{1,m}}{\alpha_{3,m}} \tau(z) \xi_m^2 Z_m(z) e^{i\omega t} \\ &= -\rho \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ D_m - \frac{\alpha_{2,m}}{\alpha_{1,m}} \frac{A_0}{\xi_m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \frac{\alpha_{1,m}}{\alpha_{3,m}} \omega_0^2 \xi_m^2 Q_m \tau(z) Z_m(z) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

………… ( 4.35 )

ただし

$$Q_m = \frac{\frac{ha \cdot K_0(ha)}{K_1(ha)} + \frac{ka \cdot K_0(ka)}{K_1(ka)} + 4}{\frac{ha \cdot K_0(ha)}{K_1(ha)} + \frac{ka \cdot K_0(ka)}{K_1(ka)} + \frac{ha \cdot K_0(ha)}{K_1(ha)} + \frac{ka \cdot K_0(ka)}{K_1(ka)}} \quad \text{………… ( 4.36 )}$$

ここに、 $\alpha_{1,m}$ ,  $\alpha_{2,m}$  : 式 (4.20),  $\alpha_{3,m}$  : (4.29)。

このように、振動圧  $p(z; t)$  は一般には構造物の変位  $\eta_0(z)$  をパラメーターとして含んでいることから振動中の構造物に作用する有効土圧は、表層地盤よりの地震力と構造物の動特性との兼ね合いにより決定されることを示しており、ここに相互作用の影響を認めることができる。

ところで表層地盤よりの地震力は、基盤に固定された剛構造物に作用する振動圧のことであるから、式 (4.35) において  $\eta_0(z) = 0$  したがって  $D_m = 0$  とすることにより、以下のように得られる。

$$p(z; t) = \rho \pi a^2 \cdot A_0 \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2,m}}{\alpha_{3,m}} Q_m \tau(z) Z_m(z) e^{i\omega t} \quad \text{………… ( 4.37 )}$$

ところで式 (4.35) あるいは式 (4.37) の  $p(z; t)$  の鉛直分布は、せん断弾性係数の分布形  $\tau(z)$  とモード形  $Z_m(z)$  との積によって定まるものであって、高次モードを無視し、 $\tau(z)$  はこれに対して単調に増大するものとすれば、表層地盤の中間の  $p(z; t)$  の値が大きくなることが当然予想され、これが先述のように均質地盤のそれと根本的に異なる点でもある。

### 4.3 剛構造物の動揺振動

#### 4.3.1 動揺振動の運動方程式

対象とする剛な地中構造物は、図 4.2 のような等断面の円柱として、これに関する仮定は第 2 章の楕円柱のそれに準ずるものとする。したがって、基盤よりの慣性力と同時に表層地盤よりの側圧を考慮するとき、この地中構造物が底面の回転中心軸まわりの  $\varphi$  なる回転振動すなわち動揺振動を行なうとすると、次式が成立する。

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c_s \frac{d\varphi}{dt} + k_R \varphi = -m_0 H_G \frac{d^2 u_B}{dt^2} - M_0' \quad \dots\dots (4.38)$$

ここに、上式右辺の第 2 項の  $M_0'$  は、表層地盤の構造物に対する回転モーメントであり、 $m_0$ ：円柱基礎の総質量、 $H_G$ ：基盤面より構造物重心点までの高さ、 $J$ ：底面の回転中心軸まわりの慣性モーメント、 $k_R$ ：接触面における基盤の回転ばね係数、 $c_s$ ：動揺粘性減衰係数、 $u_B$ ：基盤変位である。

しかるに底面の中心軸まわりの回転モーメント  $M_0'$  は、式 (4.35) で与えられる単位長さ当りの振動圧  $p(z; t)$  を用いて次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} M_0' &= \int_{H_1}^{H_2} (H_2 - z) p(z; t) dz \\ &= -\rho \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ D_m - \frac{\alpha_{2,m}}{\alpha_{1,m}} \frac{A_0}{\xi_m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \frac{\alpha_{1,m}}{\alpha_{3,m}} \alpha_{4,m} \omega_0^2 \xi_m^2 Q_m e^{i\omega t} \quad \dots\dots (4.39) \end{aligned}$$

ここに、

$$\alpha_{4,m} = \int_{H_1}^{H_2} (H_2 - z) \gamma(z) Z_m(z) dz \quad \dots\dots\dots (4.40)$$

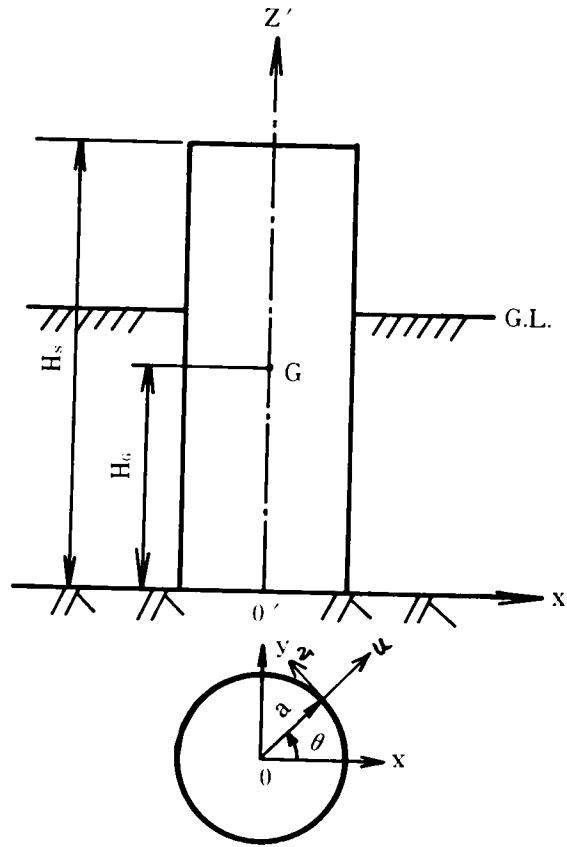


図 4.2 地盤と構造物のモデル

このとき式 (4.39) における  $D_m$  に関する項は、構造物の変位による地盤反力と解されるが、剛構造物の任意点  $z$  における変位  $\eta_0(z)$  は微小振動においては、定常回転角  $\varphi = \varphi_0 \exp(i\omega t)$  に対して

$$\eta_0(z) = (H_2 - z) \varphi_0 \quad \dots\dots\dots (4.41)$$

としてよいので、このとき式 (4.33) の  $D_m$  は次式のように求まる。

$$D_m = \frac{1}{\alpha_{1,m}} \int_{H_1}^{H_2} \eta(z) Z_m(z) dz = \frac{\varphi_0}{\alpha_{1,m}} [H_2 \alpha_{2,m} - \alpha_{5,m}] \quad \dots\dots\dots (4.42)$$

ただし、

$$\alpha_{5,m} = \int_{H_1}^{H_2} z Z_m(z) dz \quad \dots\dots\dots (4.43)$$

#### 4.3.2 剛構造物の周波数応答倍率

式 (4.38) を満たす地中構造物の定常回転角  $\varphi = \varphi_0 \exp(i\omega t)$  として式 (4.39) ~ 式 (4.43) を式 (4.38) に持込むことにより、 $\varphi_0$  は次のように得られる。

$$\varphi_0 = \frac{m_0 H_G + \rho \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2,m} \alpha_{4,m}}{\alpha_{3,m}} Q_m}{k_R + i\omega c_s - J\omega^2 + \rho \pi a^2 \omega_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(H_2 \alpha_{2,m} - \alpha_{5,m})}{\alpha_{3,m}} \alpha_{4,m} \xi_m^2 Q_m} A_0 \omega^2 \quad \dots\dots\dots (4.44)$$

このとき、分子の第 2 項が表層地盤よりの地震力を、分母の第 4 項はその複素ばね係数を与えることは、第 2 章の式 (2.55) における場合と同様である。したがって、分母第 4 項において  $\omega = 0$  とした表層地盤の静的ばね係数と、基盤の静的ばね係数との比を

$$\rho \pi a^2 \omega_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} (H_2 \alpha_{2,m} - \alpha_{5,m}) \frac{\alpha_{4,m}}{\alpha_{3,m}} Q_m / k_R = \chi \quad \dots\dots\dots (4.45)$$

とおくと、これを用いて表層地盤のばねの動的効果  $f_1 + if_2$ 、および地震力の動的効果  $g_1 + ig_2$  を次式のように定義することができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} (H_2 \alpha_{2,m} - \alpha_{5,m}) \frac{\alpha_{4,m}}{\alpha_{3,m}} \xi_m^2 Q_m}{\sum_{m=1}^{\infty} (H_2 \alpha_{2,m} - \alpha_{5,m}) \frac{\alpha_{4,m}}{\alpha_{3,m}} \left(\frac{\zeta_m}{\omega_0}\right)^2 Q_m} &= f_1 + i f_2 \\ \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2,m} \alpha_{4,m}}{\alpha_{3,m}} Q_m}{\sum_{m=1}^{\infty} (H_2 \alpha_{2,m} - \alpha_{5,m}) \frac{\alpha_{4,m}}{\alpha_{3,m}} \left(\frac{\zeta_m}{\omega_0}\right)^2 Q_m} &= g_1 + i g_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.46)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= \sqrt{\frac{J}{m_0}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k_R}{J}}, \quad m_0 = \rho_s \pi a^2 H_s \\ \frac{c_s}{J} &= 2 h_s \omega_s, \quad J = \rho_s \pi a^2 H_s \left( \frac{a^2}{4} + \frac{H_s^2}{3} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.47)$$

なる置き換えを行なうと、式(4.44)は

$$\varphi_0 = \frac{\frac{H_G}{i_0^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2 + \frac{1}{H} \chi(g_1 + i g_2)}{1 + 2 i h_s \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 + \chi(f_1 + i f_2)} A_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \dots\dots\dots (4.48)$$

と整理されるが、基準円振動数  $\omega_0$  を均質地盤のせん断 1 次の固有円振動数  $\omega_g$  にとれば、式(4.48)は均質地盤の場合と同一の形式に統一できることを示している。したがって、不均質地盤に関するもので、周波数に無関係な種々の計算量として  $\alpha_{1,m}$ ,  $\alpha_{2,m}$ ,  $\alpha_{3,m}$ ,  $\alpha_{4,m}$ ,  $\alpha_{5,m}$  を前以って計算しておけば、均質地盤における同様な取扱いができることを知る。

これより地中剛構造物の基盤より  $z'$  における水平変位の周波数応答倍率を  $|\kappa(i\omega; z')|$  とすると、それは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} |\kappa(i\omega; z')| &= \left| \frac{\varphi_0 z' + A_0}{A_0} \right| \\ &= \left| 1 + \frac{\frac{H z'}{i_0^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2 + \frac{z'}{H} \chi(g_1 + i g_2)}{1 - 2 i h_s \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 + \chi(f_1 + i f_2)} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right| \dots\dots\dots (4.49) \end{aligned}$$

ところで  $V_T$  を表層地盤の最深部における横波の速度として、基準円振動数  $\omega_0$  を  $\omega_0 = \omega_g = \pi V_T / 2H$  と表わし、かつ基盤の回転ばね係数  $k_R$  は、第2章におけると同様に地盤と構造物の接触面の剛性と形状のみに依存するものとする。また表層地盤と基盤の静的反力比を与える式(4.45)の  $\lambda$  および構造物の固有円振動数  $\omega_s$  は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= c_2 \frac{H}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{H_2}{H} \alpha_{2,m}^* - \alpha_{5,m}^* \right) \frac{\alpha_{4,m}^*}{\alpha_{3,m}^*} \left( \frac{\zeta_m}{\omega_0} \right)^2 Q_m, \\ \frac{\omega_s}{\omega_0} &= c_1 \left( \frac{a}{H} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{a}{H} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{H_s}{H} \right) \right\}^{-1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.50)$$

上式において、\*印を付したものは無次元化された量であって、 $\alpha_{1,m}^*$ ,  $\alpha_{2,m}^*$ ,  $\alpha_{3,m}^*$ ,  $\alpha_{4,m}^*$ ,  $\alpha_{5,m}^*$  については分布関数  $r(z)$  の違いによって以下のように算出される。

(i)  $N=0$  の場合：すなわち均質地盤であるから第2章のそれに相当し、 $r(z)=1$  と見なされる。このとき固有値・固有関数を式(4.17), (4.18) を用いれば、容易に次式のように  $\alpha$  の諸量が算出される。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,m}^* &= \alpha_{3,m}^* = \frac{1}{H} \int_0^H Z_m^2(z') dz' = \frac{1}{2} \\ \alpha_{2,m}^* &= \frac{1}{H} \int_0^H Z_m(z') dz' = \frac{2}{\pi(2m-1)} \\ \alpha_{4,m}^* &= \alpha_{5,m}^* = \frac{1}{H^2} \int_0^H z' Z_m(z') dz' = \frac{4 \times (-1)^{m-1}}{\pi^2(2m-1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.51)$$

( $m=1, 2, 3, \dots$ )

(ii)  $N=1$  の場合：  $r(z) = \frac{z}{H_1}$  のとき、式(4.13)を満たす固有円振動数  $\zeta_m$  に対して

$$\lambda_m = \frac{2\zeta_m H}{V_T}, \quad t_1 = \lambda_m \frac{H_1}{H}, \quad t_2 = \lambda_m \sqrt{\frac{H_1 H_2}{H^2}}$$

とすると、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,m}^* &= \frac{1}{H} \int_{H_1}^{H_2} Z_m^2(z) dz = \frac{H_1}{H} \frac{1}{t_1^2} \left[ t_2^2 B^2(t_1, t_2) - \frac{4}{\pi^2} \right] \\ \alpha_{2,m}^* &= \frac{1}{H} \int_{H_1}^{H_2} Z_m(z) dz = \frac{2H_1}{H} \frac{t_2}{t_1^2} B(t_1, t_2) \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned}
\alpha_{3,m}^* &= \frac{1}{H} \int_{H_1}^{H_2} \tau(z) Z_m^2(z) dz = \frac{H_1}{3H} \frac{1}{t_1^4} \left[ t_2^2 (t_2^2 - 2) B^2(t_1, t_2) - \frac{4 t_1^2}{\pi^2} \right] \\
\alpha_{1,m}^* &= \frac{1}{H^2} \int_{H_1}^{H_2} (H_2 - z) \tau(z) Z_m(z) dz \\
&= \frac{2H_1}{H} \frac{1}{t_1^6} \left[ \left\{ \frac{H_2}{H} t_1^2 (t_2^3 - 4 t_2) - \frac{H_1}{H} t_2 (t_2^2 - 8) \right\} B(t_1, t_2) + \frac{4}{\pi} t_1 \left\{ \frac{H_2}{H} t_1^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{H_1}{H} (t_1^2 - 8) \right\} \right] \\
\alpha_{2,m}^* &= \frac{1}{H^2} \int_{H_1}^{H_2} z Z_m(z) dz = 2 \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{1}{t_1^4} \left[ (t_2^3 - 4 t_2) B(t_1, t_2) + \frac{4}{\pi} t_1 \right]
\end{aligned}$$

ただし

$$B(t_1, t_2) = Y_1(t_1) J_1(t_2) - J_1(t_1) Y_1(t_2)$$

…………… ( 4.52 )

(iii)  $N=2$  の場合:  $\tau(z) = \left(\frac{z}{H_1}\right)^2$  のとき, 式 (4.15) を満たす固有関数  $\zeta_m$  に対して

$$\lambda_m = \frac{2 H \zeta_m}{V_T}, \quad k_m = \frac{H_1 \zeta_m}{V_0}, \quad \theta_m = \sqrt{4 k_m^2 - 1}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,m}^* &= \frac{1}{H} \int_{H_1}^{H_2} Z_m^2(z) dz = 2 k_m^2 \ln \left( \frac{H_2}{H_1} \right) + 2 \sin^2 \left\{ \frac{\theta_m}{2} \ln \left( \frac{H_2}{H_1} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left( \theta_m - \frac{1}{\theta_m} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \sin \left\{ \theta_m^2 \ln \left( \frac{H_2}{H_1} \right) \right\} \\
\alpha_{2,m}^* &= H^{-3/2} \int_{H_1}^{H_2} Z_m(z) dz = 2 \left( \frac{H_2}{H} \right)^{1/2} \sin \left\{ \frac{\theta_m}{2} \ln \left( \frac{H_2}{H_1} \right) \right\} \\
\alpha_{3,m}^* &= \frac{1}{H} \int_{H_1}^{H_2} \tau(z) Z_m^2(z) dz \\
&= - \frac{(k_m^2 + 1)(4 k_m^2 - 1)}{4 k_m^2 + 3} + \left( \frac{H_2}{H_1} \right)^2 \left[ k_m^2 + \frac{(2 k_m^2 + 1) \theta_m}{4 k_m^2 + 3} \sin \left\{ \theta_m \ln \left( \frac{H_2}{H_1} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. \cos \left\{ \theta_m \ln \left( \frac{H_2}{H_1} \right) \right\} - \frac{1}{4 k_m^2 + 1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{4,m}^* &= H^{-3/2} \int_{H_1}^{H_2} (H_2 - z) \gamma(z) Z_m(z) dz \\
&= \frac{1}{(k_m^2 + 6)(k_m^2 + 12)} \left[ \left( \frac{H_2}{H_1} \right)^2 \left( \frac{H_2}{H} \right)^{3/2} \left\{ (11k_m^2 + 6) \sin\left( \frac{\theta_m}{2} \ln \frac{H_2}{H_1} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \theta_m (k_m^2 - 6) \cos\left( \frac{\theta_m}{2} \ln \frac{H_2}{H_1} \right) \right\} + \theta_m \left( \frac{H_1}{H} \right)^{3/2} \left\{ 3(k_m^2 + 6) - 2(k_m^2 + 12) \frac{H_2}{H_1} \right\} \right] \\
\alpha_{5,m}^* &= H^{-3/2} \int_{H_1}^{H_2} z Z_m(z) dz \\
&= \frac{1}{k_m^2 + 2} \left[ \left( \frac{H_2}{H} \right)^{3/2} \left\{ (2k_m^2 + 1) \sin\left( \frac{\theta_m}{2} \ln \frac{H_2}{H_1} \right) + \theta_m \cos\left( \frac{\theta_m}{2} \ln \frac{H_2}{H_1} \right) \right\} - \theta_m \left( \frac{H_1}{H} \right)^{3/2} \right] \\
&\dots\dots\dots (4.53)
\end{aligned}$$

#### 4.4 構造物の曲げ振動

地中に埋設された基礎構造物の細長比が大きくなると、構造物はたわみやすくなり、もはや剛構造として取扱いは許されなくなる。そこでこのような構造物に曲げ振動が卓越すると考えると、4.3の剛構造物の動揺振動におけると同様に、構造物の曲げ変形に伴う表層地盤内への放射波を考慮せねばならなくなり、構造物の変形量自身にも依存する地盤よりの反力が生ずることになる。したがって構造物の地中部分に作用する振動圧  $p(z; t)$  を用いると、表層地盤との連成を考慮した構造物のたわみ  $\eta(z; t)$  は以下のように解析される。

##### 4.4.1 曲げ振動の運動方程式

構造物の埋設部分は円形等断面であるとする、不均質表層地盤との相互作用を考慮した場合の曲げ変形量  $\eta(z; t)$  は次式を満たす。

$$\rho_p \pi a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \left( E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) I \frac{\partial^4 \eta}{\partial z'^4} = -\rho_p \pi a^2 \frac{\partial^2 u_B}{\partial t^2} + p(H_2 - z'; t) \dots\dots\dots (4.54)$$

ここに、 $\rho_p$ ：換算密度、 $a$ ：断面の半径、 $E$ ：ヤング係数、 $I$ ：断面2次モーメント、 $\epsilon$ ：曲げ振動における粘性減衰係数である。また右辺第2項の  $p(H_2 - z'; t)$  は、式(4.35)で与えられる表層地盤より構造物に作用する側圧であるが、先述のようにこの  $p(H_2 - z'; t)$  は振動中は構造物のたわみ  $\eta(z; t)$  に左右されるものである。

そこでこの系に式(4.3)のような調和外力が働くとき、構造物のたわみとして

$$\eta(z'; t) = \eta_0(z') e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (4.55)$$

なる定常振動を考えると、式(4.54)は次式となる。

$$(E + i\varepsilon\omega)I \frac{d^4 \eta_0}{dz'^4} - \rho_p \pi a^2 \omega^2 \eta_0 = \rho_p \pi a^2 \cdot A_0 \omega^2 + p_0(H_2 - z') \quad \dots\dots\dots (4.56)$$

ただし  $p_0(z)$  は式(4.35)の側圧  $p(z; t)$  の時間項  $\exp(i\omega t)$  を省略したものであるから、当然のことながら  $0 \leq z' \leq H$  の範囲で存在するものであり、 $z'$  のその他の領域における  $p_0(z)$  の値は0と見なさなければならない。

そこで式(4.56)におけるたわみ  $\eta_0(z')$  を、この系の非減衰自由振動の方程式

$$\frac{d^4 Y_k(z'; \nu_k)}{dz'^4} - \lambda_k^4 Y_k(z'; \nu_k) = 0, \quad \left( \lambda_k^4 = \frac{\rho_p \pi a^2}{EI} \nu_k^2 \right) \quad \dots\dots\dots (4.57)$$

を満足する固有値  $\lambda_k$  (波数) と固有関数  $Y_k(z; \nu_k)$  でもって、

$$\eta_0(z') = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Y_k(z'; \nu_k) \quad \dots\dots\dots (4.58)$$

と展開されたものとする。このとき式(4.56)は

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \{ (E + i\varepsilon\omega)I \cdot \lambda_k^4 - \rho_p \pi a^2 \omega^2 \} Y_k(z'; \nu_k) = \rho_p \pi a^2 \cdot A_0 \omega^2 + p_0(H_2 - z') \quad \dots\dots\dots (4.59)$$

のように変形されるが、このとき固有関数  $Y_k(z; \nu_k)$  を

$$\frac{1}{L} \int_0^L Y_k(z'; \nu_k) Y_l(z'; \nu_l) dz' = \delta_{kl} \quad \dots\dots\dots (4.60)$$

のように正規化されているものとする。ただし  $\delta_{kl}$  は Kronecker の delta である。

ところで、式(4.59)の右辺第2項の側圧  $p_0(H_2 - z')$  は先述のように、式(4.35)で与えられるが、その中に含まれる  $D_m$  は式(4.33)からも分るように、たわみ  $\eta_0(z')$  の積分を含んでいる。そこでこの  $D_m$  は式(4.58)を用いて

$$D_m = \frac{1}{\alpha_{1,m}} \int_{H_1}^{H_2} \eta_0(z) Z_m(z) dz$$

$$= \frac{1}{\alpha_{1,m}} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_{H_1}^{H_2} Y_k(H_2 - z; \nu_k) Z_m(z) dz \quad \dots\dots\dots (4.61)$$

となるので、式(4.35)の時間項  $\exp(i\omega t)$  を省いた側圧  $p_0(z) = p_0(H_2 - z')$  を式(4.59)の右辺第2項に持込むと結局次式をうる。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[ \left\{ (E + i\varepsilon\omega) I \cdot \lambda_k^4 - \rho_p \pi a^2 \omega^2 \right\} Y_k(z'; \nu_k) \right. \\ & \quad \left. + \rho \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_0^2}{\alpha_{3,m}} \xi_m^2 Q_m \gamma(H_2 - z') Z_m(H_2 - z') \int_{H_1}^{H_2} Y_k(H_2 - z; \nu_k) Z_m(z) dz \right] \\ & = \rho_p \pi a^2 \cdot A_0 \omega^2 + \rho \pi a^2 \cdot A_0 \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2,m}}{\alpha_{3,m}} Q_m \gamma(H_2 - z') Z_m(H_2 - z') \quad \dots\dots\dots (4.62) \end{aligned}$$

ここで、式(4.62)の両辺に構造物の固有関数  $Y_l(z'; \nu_l)$  を乗じて  $z'$  に関して  $[0, L]$  で積分を行なえば、展開係数  $B_k$ 、( $k=1, 2, 3, \dots$ ) に関する次の無限連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[ \left\{ \left( \frac{\nu_k}{\omega} \right)^2 + 2 i h_k \left( \frac{\nu_k}{\omega} \right) - 1 \right\} \delta_{kl} + A_{kl} \right] & = A_0 \{ A_l + I_l \}, \\ & (l = 1, 2, 3, \dots\dots\dots) \quad \dots\dots\dots (4.63) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし, } A_{kl} &= \frac{H}{L} \frac{\rho}{\rho_p} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_m^2}{\alpha_{3,m}^*} Q_m J_{lm}(\nu_l, \zeta_m; N) \cdot K_{km}(\nu_k, \zeta_m) \\ A_l &= \frac{H}{L} \frac{\rho}{\rho_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2,m}^*}{\alpha_{3,m}^*} Q_m J_{lm}(\nu_l, \zeta_m; N) \\ I_l &= \frac{1}{L} \int_0^L Y_l(\xi'; \nu_l) d\xi' \\ J_{lm}(\nu_l, \zeta_m; N) &= \frac{1}{H} \int_0^H Y_l(\xi'; \nu_l) \left( \frac{H_2 - \xi'}{H_1} \right)^N Z_m(H_2 - \xi'; \zeta_m) d\xi' \\ K_{km}(\nu_k, \zeta_m) &= \frac{1}{H} \int_0^H Y_k(\xi'; \nu_k) Z_m(H_2 - \xi'; \zeta_m) d\xi' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.64)$$

ところで構造物の固有円振動数  $\nu_k$  とその  $k$  次減衰定数  $h_k$  は式(4.57)における固有値  $\lambda_k$  によって、次式のように置き換えられている。

$$\nu_k^2 = \frac{EI \lambda_k^4}{\rho_p \pi a^2}, \quad h_k = \frac{\epsilon I \lambda_k^2}{2 \rho_p \pi a^2 \nu_k} \quad \dots\dots\dots (4.65)$$

かくして、展開係数  $B_k$ , ( $k=1,2,3,\dots$ ) を定めるべき式 (4.63) の連立方程式が導かれたので、これを解けば式 (4.58) より所期のたわみ  $\eta_0(z')$  を求めることができるが、このまま  $B_k$  を無限個連立させて厳密に解くことはできない。ところで式 (4.64) における  $I_l$  は基盤よりの慣性効果に相当する部分であるが、これは構造物の  $l$  次の固有関数の平均化でもあるから、高次モードになるほど、この  $I_l$  は急速に減少する量であることが分る。さらに式 (4.63) の右辺の構成からも分るように、この  $I_l$  と表層地盤よりの地震力  $A_l$  (式 (4.64) の第2式) との和が振動中構造物が受ける全地震力である。

一方、 $J_{lm}(\nu_l, \zeta_m; N)$  および  $K_{km}(\nu_k, \zeta_m)$  は構造物の固有関数と不均質地盤の固有関数との積の平均化あるいは互に他の固有関数を重みとした平均化である。この平均化において、構造物と地盤のモード形が相異なるほどその値は小さくなり、かつまた高次モードになるほど  $J_{lm}(\nu_l, \zeta_m; N)$  および  $K_{km}(\nu_k, \zeta_m)$  はその値が小さくなることは明らかであるから、結局展開係数  $B_k$  の係数行列は、実際上は最初の適当な有限個のモードを考慮すればよいであろう。これらは積分の方法が  $[0, H]$  で行なうので、表層厚  $H$  に比べて構造物の全長  $L$  が大きいときは、構造物のモード形  $Y_l(\xi'; \nu_l)$  は一部分のみしか積分に関与しないので、構造物のモード形の影響を受けにくくなり、かつまた地盤に比べて構造物の固有振動数は次数の増大とともに著しく大きくなるので、結局構造物の1次固有円振動数  $\nu_1$  と地盤の1次固有円振動数  $\zeta_1$ 、あるいは2次の  $\zeta_2$ 。くらいまでとの相対関係に注目すればよからう。

#### 4.4.2 構造物の固有値・固有モード

このようなたわみやすい円柱状構造物の空中における曲げ振動においても固有値  $\lambda_k$ ・固有モード  $Y_k(z'; \nu_k)$  を定めるに当っては、4個の境界条件を必要とする。本章では図4.3のような、構造物の先端は堅い基盤に剛結されていて、上端に上載荷重のあるモデル(I)と、上載荷重のないかわりに地表面よりさらに無拘束の突出部を持った等断面のモデル(II)とを考えることにする。

したがって、モデル(I)では

$$\eta(0) = \frac{\partial \eta(0)}{\partial z'} = \frac{\partial \eta(H)}{\partial z'} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 \eta(H)}{\partial z'^3} = \frac{W_U}{g} \frac{\partial^2 \eta(H)}{\partial t^2}$$

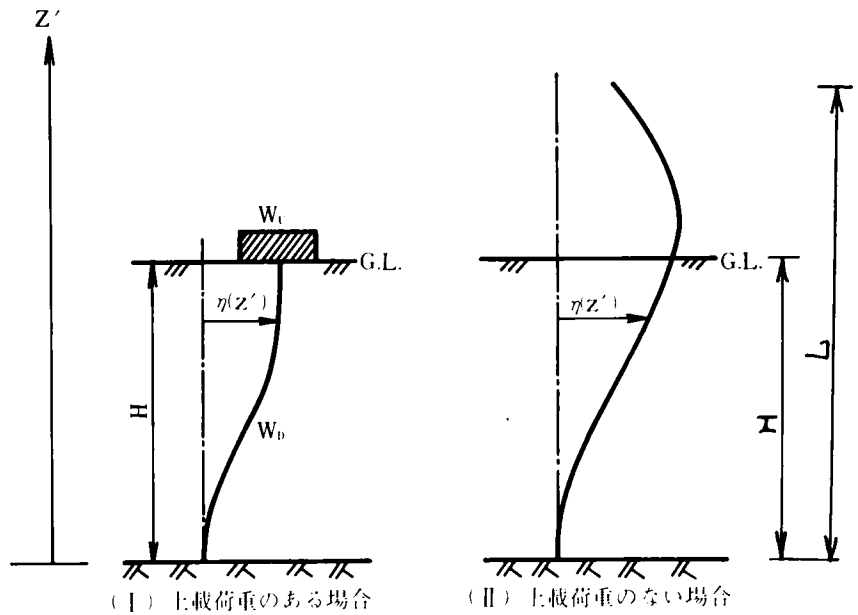


図 4.3 柔構造物モデル

より,

振動数方程式:

$$\frac{W_u \lambda_k}{\rho_p g \pi a^2} \cos \lambda_k H \cdot \cosh \lambda_k H + \sin \lambda_k H \cdot \cosh \lambda_k H + \cos \lambda_k H \cdot \sinh \lambda_k H - \frac{W_u \lambda_k}{\rho_p g \pi a^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.66)$$

固有関数:

$$Y_k(z'; \nu_k) = A_k \left[ \frac{\sin \lambda_k z' - \sinh \lambda_k z'}{\cos \lambda_k H - \cosh \lambda_k H} + \frac{\cos \lambda_k z' - \cosh \lambda_k z'}{\sin \lambda_k H - \sinh \lambda_k H} \right] \quad \dots\dots\dots (4.67)$$

ただし

$$A_k = (\sin \lambda_k H + \sinh \lambda_k H) (\cos \lambda_k H - \cosh \lambda_k H) / [(\cos \lambda_k H - \cosh \lambda_k H)^2 + \frac{1}{\lambda_k H} \{ \sinh^2 \lambda_k H - \sin^2 \lambda_k H + 3 (\cos \lambda_k H \cosh \lambda_k H - 1) \} (1 - \cos \lambda_k H \cdot \cosh \lambda_k H)]^{1/2}$$

一方モデル (II) においては,

$$\eta(0) = \frac{\partial \eta(0)}{\partial z'} = \frac{\partial^2 \eta(0)}{\partial z'^2} = \frac{\partial^3 \eta(0)}{\partial z'^3} = 0$$

より,

$$\text{振動数方程式: } 1 + \cos \lambda_k L \cdot \cosh \lambda_k L = 0 \quad \dots\dots\dots (4.68)$$

固有関数:

$$Y_k(z'; \nu_k) = (\cos \lambda_k L + \cosh \lambda_k L) \left\{ \frac{\cos \lambda_k z' - \cosh \lambda_k z'}{\cos \lambda_k L + \cosh \lambda_k L} - \frac{\sin \lambda_k z' - \sinh \lambda_k z'}{\sin \lambda_k L + \sinh \lambda_k L} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.69)$$

#### 4.4.3 構造物の周波数応答倍率

展開係数  $B_k$ , ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) を式 (4.63) より求めるに当っては, 地盤・構造物のモードが相当高次になると, 式 (4.63) における  $B_k$  の係数行列の要素と右辺の  $A_l$  と  $I_l$  の要素が急速に減少するので, 最初の適当数の次数のモードのみを考慮することにして, 有限個の係数行列の要素を

$$\left. \begin{aligned} a_{lk} &= \left\{ 1 + 2i h_k \frac{\omega}{\nu_k} - \left( \frac{\omega}{\nu_k} \right)^2 \right\} \delta_{kl} + A'_{kl} \\ c_l &= A'_l + I'_l, \quad (l, k=1, 2, 3, \dots, M) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.70)$$

として解けばよからう。このとき行列  $[a_{lk}]$  は正則であると考えてよいので, 結局展開係数  $\{B_k\}$ , ( $k=1, 2, 3, \dots, M$ ) は

$$\{B_k\} = A_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 [a_{lk}]^{-1} [c_l], \quad (k, l=1, 2, 3, \dots, M) \quad \dots\dots\dots (4.71)$$

として求まる。ただし

$$A'_{kl} = \left( \frac{\omega_0}{\nu_l} \right)^2 \frac{H}{L} \frac{\rho}{\rho_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_m^2}{\alpha_{3,m}^*} Q_m J_{lm}(\nu_l, \zeta_m; N) K_{km}(\nu_k, \zeta_m) \quad \left| \right.$$

$$\left. \begin{aligned} A_l' &= \left( \frac{\omega_0}{\nu_l} \right)^2 \frac{H}{L} \frac{\rho}{\rho_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2,m}^*}{\alpha_{3,m}^*} Q_m J_{lm}(\nu_l, \zeta_m; N) \\ I_l' &= \left( \frac{\omega_0}{\nu_l} \right) \frac{1}{L} \int_0^L Y_l(\xi'; \nu_l) d\xi' \\ \xi_m^2 &= \left( 1 + i\omega \frac{\mu_0'}{\mu_0} \right) \left( \frac{\zeta_m}{\omega_0} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.72)$$

このように地盤の不均質性  $H_i/H$  あるいは  $N$  の値と、基礎構造物の幾何学形式が定まれば、たわみの展開係数  $B_k$  が得られるが、式(4.58)より基盤面から任意高さ  $z'$  におけるたわみ  $\eta_0(z')$  をうることができる。かくして、 $z'$  点における応答倍率は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} |\kappa(i\omega; z')| &= \left| \frac{A_0 + \eta_0(z')}{A_0} \right| \\ &= \left| 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \sum_{k=1}^M [a_{lk}]^{-1} [c_l] Y_k(z'; \nu_k) \right| \dots\dots\dots (4.73) \end{aligned}$$

さらにまた、このときの  $z'$  点において基礎構造物に生ずる曲げモーメント  $M(z')$  は

$$M(z') = EI \frac{d^2 \eta(z'; t)}{dz'^2} = EI \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \sum_{k=1}^M [a_{lk}]^{-1} [c_l] \frac{d^2 Y_k(z'; \nu_k)}{dz'^2} e^{i\omega t} \dots\dots\dots (4.74)$$

で与えられる。

ところで、行列  $[a_{lk}]$  は正方でなくてはならないが、このような不均質地盤においては、一般に要素  $a_{lk}$  の中では  $A'_{kl} \neq A'_{lk}$  であるから、もちろん対称行列ではない。というのは、式(4.72)の  $A'_{kl}$  における  $J_{lm}(\nu_l, \zeta_m; N)$  と  $K_{km}(\nu_k, \zeta_m)$  は式(4.64)よりも分るように、不均質地盤においては  $N \neq 0$  なるゆえ  $J_{lm}(\nu_l, \zeta_m; N) \neq K_{lm}(\nu_l, \zeta_m)$  であるからである。

一方均質地盤の場合は  $N=0$  とすればよいから、 $A'_{kl} = A'_{lk}$  となり行列  $[A'_{kl}]$  は対称になるが、係数  $(\omega_0/\nu_l)^2$  が次数  $l$  に依存するので、行列  $[a_{lk}]$  は同様に対称ではなく、要素  $a_{lk}$  はその行が下になるほど ( $l$  が大なるほど) 急速に小さくなってゆくことが分る。このような要素  $a_{lk}$  の特徴は不均質地盤についても同様であって、行列  $[a_{lk}]$  の主対角要素が非対角要素に比して大きいとは言えないことは明らかであろう。しかしながら行列  $[a_{lk}]$  は、 $A'_{kl}$  の大きいときは、主対角要素より下方の要素をすべて0とする三角行列で、 $A'_{kl}$  の小さいときは対角行列と見なしうるので、いずれにしても式(4.71)の  $\{B_k\}$  は近似的に次のように



簡略化してもよからう。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &\cong A_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{c_1}{a_{11}} = A_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{A'_1 + I'_1}{1 + 2 i h_1 \frac{\omega}{\nu_1} - \left( \frac{\omega}{\nu_1} \right)^2 + A'_{11}} \\ &\dots\dots\dots \\ B_k &\cong A_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{c_k}{a_{kk}} = A_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{A'_k + I'_k}{1 + 2 i h_k \frac{\omega}{\nu_k} - \left( \frac{\omega}{\nu_k} \right)^2 + A'_{kk}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.75)$$

このとき式(4.58)より、たわみ  $\eta_0(z')$  は次式で与えられよう。

$$\eta_0(z') = \sum_{k=1}^M B_k Y_k(z, \nu_k) \cong A_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \sum_{k=1}^M \frac{A'_k + I'_k}{1 + 2 i h_k \frac{\omega}{\nu_k} - \left( \frac{\omega}{\nu_k} \right)^2 + A'_{kk}} \cdot Y_k(z', \nu_k) \dots\dots (4.76)$$

この近似式は、各モードに対する応答を重みとして展開することによって、所期の応答が得られることを意味しており、いわゆるモーダルアナリシスによる結果と形式的には同じ形であることを示している。したがって、柔構造物の1次モード ( $k=1$ ) が剛構造物の動揺振動モードに対応しているわけで、その他の各モード形に対する応答量が重みとして寄与していることが分る。

ところで、式(4.76)の分母の第4項  $A'_{kk}$  は、構造物が  $k$  次モード形をとる際に、地盤が構造物に付与する剛性効果を意味しており、これを実部・虚部に分けて考えるため

$$A'_{kk} = A'_{kk,1} + i A_{kk,2} \quad , \quad (A_{kk,1}, A_{kk,2} : \text{実数}) \dots\dots (4.77)$$

と書き表わすと、これは剛構造物の動揺振動における  $\chi(f_1 + i f_2)$  に相当することが分る。このとき、虚数部は減衰に関係する量であることは言うまでもないが、もしこの虚部  $A'_{kk,2}$  が  $\omega$  の1次関数として表わしうれば、式(4.76)より  $k$  次モードに対する逸散減衰定数  $h'_k$  に換算しうることになり、簡単な次式で与えられる。

$$h'_k = \frac{1}{2} \beta_k \frac{\nu_k}{\omega_0} \dots\dots (4.78)$$

ただし、 $\beta_k$  は  $A'_{kk,2}$  のこう配である。

以上のように式(4.76)のように近似的な展開が許されると、たわみやすい構造物の取扱いがきわめて容易になることがわかるが、これらの近似化が妥当であるかどうかを見るために、数値計算例の1つを表4.1(a),(b)に掲げた。(a),(b)はおのおの上載荷重のない場合( $L/H=2$ )と、それがあある場合( $W_U/W_D=1$ )について示したもので、両表とも不均質地盤の弾性定数の分布関数 $r(z)$ が $N=1$ に従い、不均質の程度が $H_1/H=1$ (図4.1参照)であって、入力円振動数が $\omega/\omega_0=1$ の場合について計算したものである。各要素は複素数表示のため、それぞれ前半の数値は実部、後半は虚部が示されている。おのおのの表の上から2行目から6行目までは、行列 $[A'_{kl}]$ の要素を示したものであるが、(a),(b)いずれの場合でも上方の行の要素ほど( $l$ が小なるほど)大きく、したがって $[A'_{kl}]$ の直下に示した行列 $[a_{lk}]$ は主対角要素より上方の要素の値が、その下方の要素に比してかなり大きく、上記の近似化の妥当性が示されているものと言えよう。

一方各表の下方より3行目は、 $l$ 次モードに対する表層よりの地震力 $A'_l$  ( $l=1,2,3,\dots,M$ )であるが、次数の増大とともに急速に低下することを示している。基盤より受ける慣性力 $I'_l$ は、この表層地盤よりの地震力 $A'_l$ に比べてかなり小さく、式(4.76)の各項の分子はほとんど表層地盤の影響 $A'_l$ で支配されることを示している。

これと先述の行列 $[a_{lk}]$ の性質から考えると、 $\{B_k\}$ は最初の数項のみを考慮すればよからうと言えるわけで、各表の最後の行の $\{B_k\}$ の各要素がそのことを如実に物語っていると言えよう。

#### 4.5 数値計算結果とその考察

本章で取扱っている不均質地盤はすでに仮定したように、第2章と同様に上下変位は考慮されておらず、かつまた均質地盤との比較のために、図4.1に見たように表層地盤の最深部すなわち基盤面における弾性係数 $\lambda, \mu$ および減衰係数 $\mu'$ は均質地盤のそれら $\lambda_0, \mu_0$ および $\mu'_0$ と一致するものとする。したがって、ここでのいう表層地盤の不均質性とはその弾性係数等が均質地盤のそれらに対して低下する程度を示すことになり、不均質性が大なるほどその地盤は基盤面より地表面に向ってのこれら物理定数の低下が著しい、すなわちそれだけ均質地盤に比べて軟かいことを意味するものと言えよう。ここでは物理定数が深さの1乗( $N=1$ )および2乗( $N=2$ )に比例して変化する場合を対象にしている。さらに式(4.50)における係数 $c_1$ および $c_2$ についてはそれぞれ $c_1=2.0$ 、 $c_2=0.1$ を与え、かつ表層地盤の減衰定数 $h_g$ については、均質地盤のそれを $h_g=0.05$ とした。また基盤面より鉛直上方に入射してくる地震波

表 4.1 数 値 計 算 例

(a) 上 載 荷 重 の な い 場 合

FREQ= 1.000									
STRUCT= 5					H <sub>1</sub> /H= 1.000				
RAMD/AKM= 5*5					A= 5*5				
NP= 1					EXFORCE= 5				
RAMD/AKM= 5					RAMD/AK= 5				
					C= 5				
					B= 5				
[ a <sub>k</sub> ' ]	6.764E-01,	1.138E-02	9.918E-01,	1.815E-03	9.989E-01,	6.483E-04	9.997E-01,	3.308E-04	9.999E-01, 2.001E-04
	5.639E-01,	1.967E-01	1.572E 00,	5.914E-01	1.091E 00,	5.359E-01	-5.416E-01,	2.810E-02	-7.960E-01, -1.647E-01
	3.867E-02,	1.551E-02	1.193E-01,	4.699E-02	1.194E-01,	4.367E-02	2.054E-02,	4.051E-03	-3.618E-02, -1.241E-02
	2.835E-03,	1.942E-03	1.362E-02,	6.021E-03	2.551E-02,	5.929E-03	2.389E-02,	1.124E-03	7.909E-03, -1.256E-03
	-7.287E-04,	9.737E-05	-1.049E-04,	3.539E-04	5.475E-03,	4.839E-04	1.091E-02,	3.362E-04	8.608E-03, 1.523E-04
[ a <sub>k</sub> ' ]	-2.784E-04,	-3.369E-05	-6.109E-04,	-9.653E-05	4.765E-04,	-6.124E-05	2.946E-03,	7.662E-05	4.466E-03, 1.519E-04
	1.240E 00,	2.081E-01	1.572E 00,	5.914E-01	1.091E 00,	5.359E-01	-5.416E-01,	2.810E-02	-7.960E-01, -1.647E-01
	3.867E-02,	1.551E-02	1.111E 00,	4.881E-02	1.194E-01,	4.367E-02	2.054E-02,	4.051E-03	-3.618E-02, -1.241E-02
	2.835E-03,	1.942E-03	1.362E-02,	6.021E-03	1.024E 00,	6.577E-03	2.389E-02,	1.124E-03	7.909E-03, -1.256E-03
	-7.287E-04,	9.737E-05	-1.049E-04,	3.539E-04	5.475E-03,	4.839E-04	1.011E 00,	6.670E-04	8.608E-03, 1.523E-04
[ f <sub>k</sub> ' ]	-2.784E-04,	-3.369E-05	-6.109E-04,	-9.653E-05	4.765E-04,	-6.124E-05	2.946E-03,	7.662E-05	1.004E-00, 3.520E-04
	2.534E-01,	0.0	3.575E-03,	0.0	2.674E-04,	0.0	4.978E-05,	0.0	1.417E-05, 0.0
	-5.341E 00,	-5.958E 00	-4.224E-01,	-4.754E-01	-5.347E-02,	-6.152E-02	-2.824E-03,	-3.945E-03	9.823E-04, 8.446E-04
	-5.088E 00,	-5.958E 00	-4.189E-01,	-4.754E-01	-5.320E-02,	-6.152E-02	-2.774E-03,	-3.945E-03	9.965E-04, 8.446E-04
	-4.437E 00,	-3.595E 00	-2.791E-01,	-2.228E-01	-4.416E-02,	-3.666E-02	-6.179E-03,	-5.766E-03	-2.249E-04, -4.344E-04

(b) 上 載 荷 重 の あ る 場 合

FREQ= 1.000									
STRUCT= 5					H <sub>1</sub> /H= 1.000				
RAMD/AKM= 5*5					A= 5*5				
NP= 1					EXFORCE= 5				
RAMD/AKM= 5					RAMD/AK= 5				
					C= 5				
					B= 5				
[ A <sub>k</sub> ' ]	-8.329E-01,	2.708E-02	9.721E-01,	3.342E-03	9.960E-01,	1.261E-03	9.989E-01,	6.519E-04	9.996E-01, 3.966E-04
	1.533E 01,	5.971E 00	1.690E 01,	6.581E 00	-9.569E-01,	-2.572E-01	3.643E 00,	2.912E 00	0.0 0.0
	1.912E-01,	1.176E-01	1.389E 00,	1.629E-01	3.956E-02,	-3.532E-03	-3.397E-01,	4.674E-02	0.0 0.0
	-2.301E-03,	-4.532E-04	4.212E-03,	-3.148E-04	2.385E-03,	8.780E-05	6.605E-03,	1.142E-05	0.0 0.0
	2.053E-03,	1.623E-03	-1.291E-02,	1.327E-03	1.362E-03,	-2.641E-05	1.168E-01,	4.605E-03	0.0 0.0
[ a <sub>k</sub> ' ]	0.0 0.0	0.0	0.0 0.0	0.0	0.0 0.0	0.0	0.0	0.0	0.0 0.0
	1.450E 01,	5.998E 00	1.690E 01,	6.581E 00	-9.569E-01,	-2.572E-01	3.643E 00,	2.912E 00	0.0 0.0
	1.912E-01,	1.176E-01	2.361E 00,	1.663E-01	3.956E-02,	-3.532E-03	-3.397E-01,	4.674E-02	0.0 0.0
	-2.301E-03,	-4.532E-04	4.212E-03,	-3.148E-04	9.984E-01,	1.349E-03	6.605E-03,	1.142E-05	0.0 0.0
	2.053E-03,	1.623E-03	-1.291E-02,	1.327E-03	1.362E-03,	-2.641E-05	1.116E 00,	5.257E-03	0.0 0.0
[ f <sub>k</sub> ' ]	0.0 0.0	0.0	0.0 0.0	0.0	0.0 0.0	0.0	0.0	0.0	0.0 0.0
	7.613E-01,	0.0	1.854E-02,	0.0	9.221E-06,	0.0	3.516E-04,	0.0	9.996E-01, 3.966E-04
	-1.002E 02,	-1.126E 02	-1.939E 00,	-2.288E 00	8.100E-03,	7.796E-03	-2.892E-02,	-3.205E-02	0.0 0.0
	-9.946E 01,	-1.126E 02	-1.921E 00,	-2.288E 00	8.109E-03,	7.796E-03	-2.857E-02,	-3.205E-02	0.0 0.0
	-8.164E 00,	-3.961E 02	-3.680E-01,	-2.172E-01	-7.144E-03,	-4.140E-03	-2.091E-02,	-1.153E-02	0.0 0.0

はせん断振動のみで表層地盤内を伝播するが、構造物表面での散乱放射波はせん断および体積変化を伴って無限遠方に逸散するものとする。

#### 4.5.1 表層地盤変位と地震力

図 4.4 は不均質地盤の固有円振動数  $\zeta_n/\omega_0$  が不均質性の程度を示す目安である  $H_1/H$  との関係を示したものである。この図 4.4 においては不均質性の変動の仕方を示すパラメータ  $N=1$  および  $N=2$  の場合について示してあるが、これらは各々式 (4.13) および式 (4.15) を数値的に解いて得られたもので、代表的にせん断 1 次および 2 次の固有円振動数  $\zeta_1, \zeta_2$  を均質地盤の基本円振動数  $\omega_0$  に対する比でもって示してある。ただし図中 Homogeneous とは均質地盤

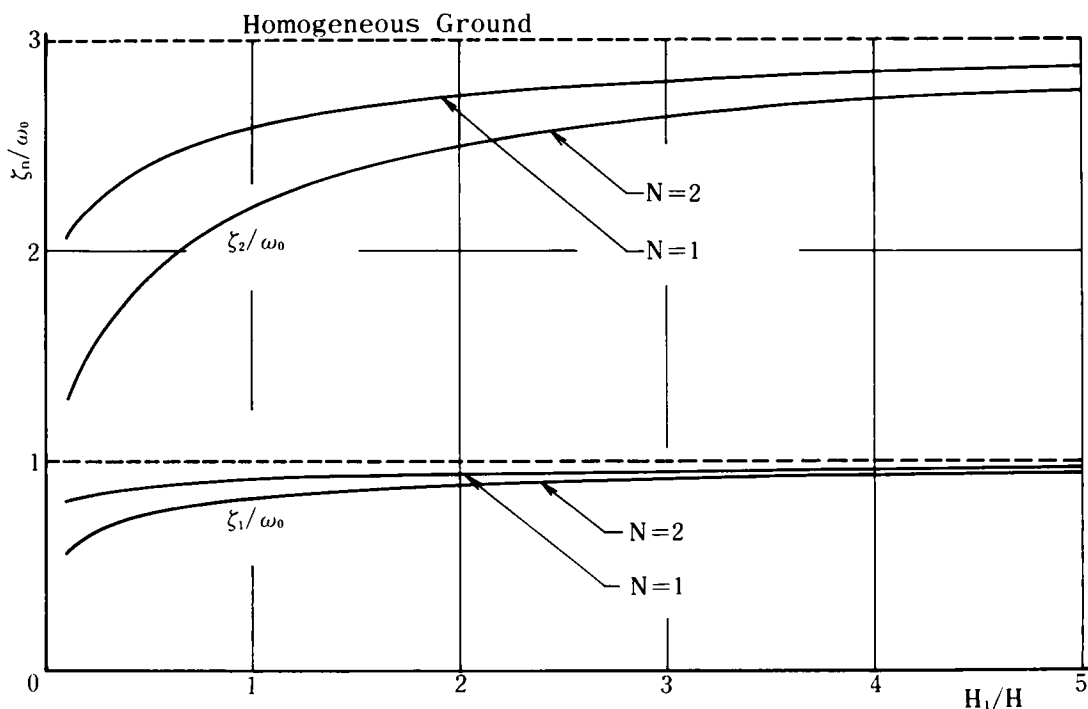


図 4.4 不均質地盤の固有円振動数

盤の場合を示している。この図より各不均質地盤の基本振動数 $\omega_1$ は均質地盤のそれ $\omega_0$ と大差ないと言えようが、2次の固有円振動数 $\omega_2$ では均質地盤に比べてその低下が著しいことを示しており、かつまた不均質性の指標 $H_1/H$ が1より小さい範囲ではその傾向はさらに顕著である。このように不均質性が高まるほど2次およびそれ以上の高次の固有円振動数は急激に低下してくるので、低周波領域に多くのモードの波が伝播しうること示している。

そこで不均質地盤の固有値に対する固有モードを3次まで示したのが図4.5であり、上下図

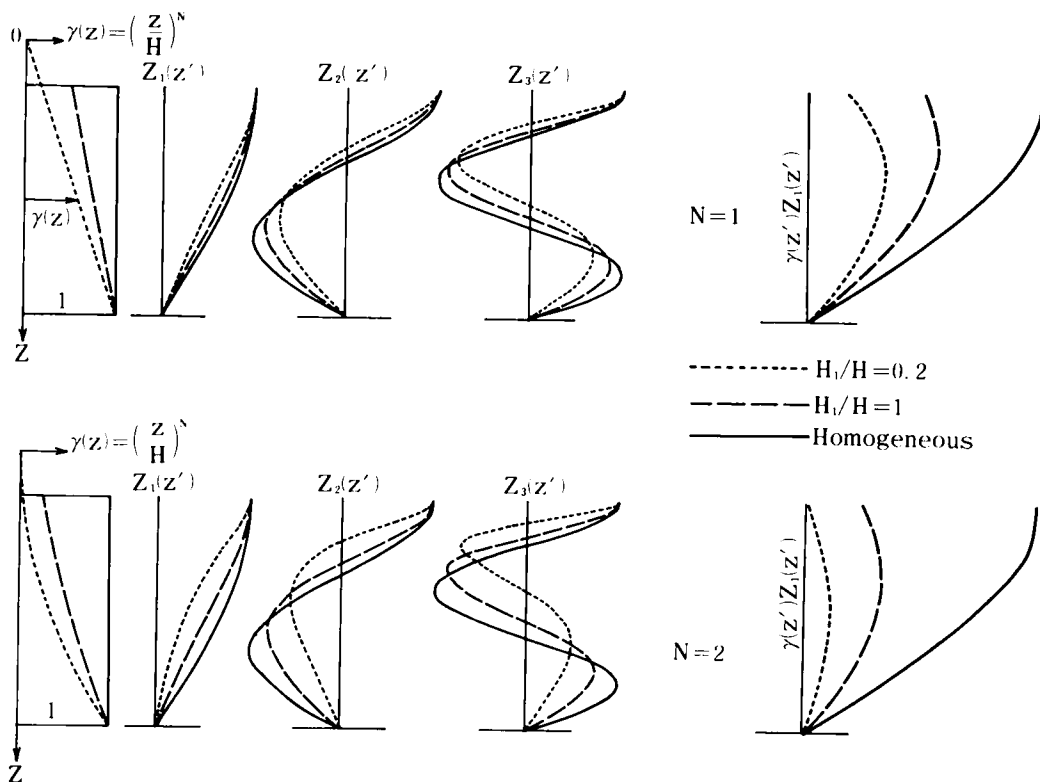


図 4.5 表層地盤の固有モードの不均質性依存度

はそれぞれ  $N=1$  および  $N=2$  の場合である。図の左端に弾性係数の分布形  $r(z)$  を示しているように、当然のことながら不均質性が高まるにつれて地盤上部が相対的に軟らかくなるので、下部に比べて振幅の増大が著しく、かつ高次モードではその腹に相当する位置が上方に移動して行き、その傾向は  $N=2$  の方がより顕著であることが示されている。このように、 $H_1/H$  が小あるいは  $N$  が大なるほど弾性係数の低下の割合が大きくそれだけ不均質性が増すことになるので、このとき地表面に近い部分に高次モードの影響が出やすくなるものと言えよう。ところで同図の左端の分布関数形  $r(z')$  と第1次モード形  $Z_1(z')$  との積を同図の右端に示しているが、

同様に  $H_1/H$  が小なるほど  $N$  が大なるほど、 $r(z') \cdot Z_1(z')$  はその最大点が下降する。つまり不均質性が大なるほど凸部が下方に移動する。

これらの固有モードの展開でもって表わされた表層地盤の変位および剛構造物に作用する表層地盤よりの地震力の絶対値の鉛直分布について図示したものが、図 4.6 ～ 図 4.8 である。図 4.6 および図 4.7 はそれぞれ、式 (4.9) で与えられる弾性係数の分布関数  $r(z)$  が深さの 1 乗 ( $N=1$ ) およびその 2 乗 ( $N=2$ ) に比例する場合であって、図の上方が地盤変位を下方が地震力を図示してある。両図から分るように、外乱が地盤変位・地震力とともに表層地盤の第 1 次共振点付近の振動数を持つときに大きな振幅を示し、高次になればかなり振幅は低下するのは、4.2.1 で触れたように、 $\omega$  の増大とともに式 (4.19) の  $\xi_m$  の虚部が増大、すなわち高次モードに対する減衰効果の増大によるものである。また地盤変位はその鉛直分布形が均質と不均質とによるそれほど明瞭な差異は見られないが、地震力  $p(z'; t)$  の分布形が不均質性によって非常に異なることが知られる。すなわち不均質性が大なるほど、あるいは  $H_1/H$  が小なるほど地震力は下方にその最大点が移ってゆき、地表面のそれに比べてきわめて大きな差異が

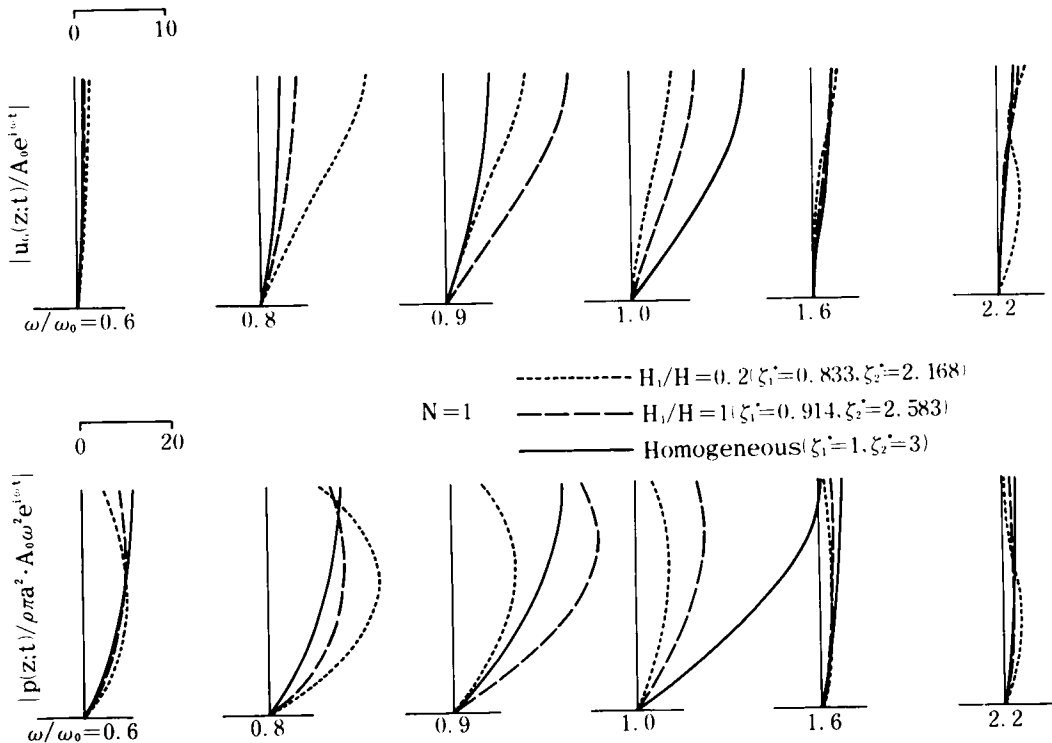


図 4.6 表層地盤変位と地震力の鉛直分布

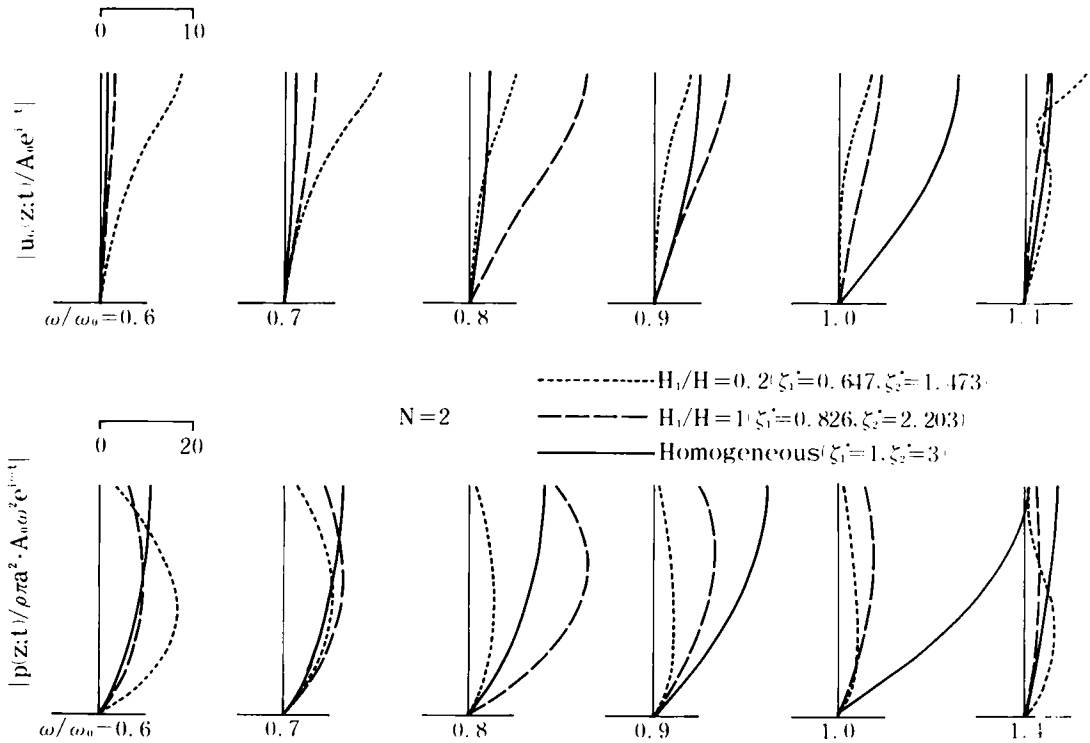


図 4.7 表層地盤変位の地震力の鉛直分布

あり，これは均質地盤の傾向と全く逆であることを示している。特に図 4.7 のように分布形  $r(z)$  が  $N=2$  の場合ではさらに最大地震力を示す点が下方に移ってくることが示されているが，これは上述の図 4.5 の右端の  $r(z')/Z_1(z')$  の不均質性への依存の傾向より分るように，ほとんど第 1 次モード形と分布関数との積の形で決定されてくるものであるといえよう。一方図 4.8 は不均質地盤  $H_1/H=1$  ( $N=1$ ) なる場合の表層地盤よりの地震力  $p(z'; t)$  が構造物の形状，すなわち構造物の根入長  $H$  とその半径  $a$  との比  $H/a$  による影響を調べたものであるが， $H/a$  が大，すなわち一定表層厚  $H$  に対して構造物の半径  $a$  を縮少するような場合，これに作用する地震力  $p(z'; t)$  は構造物の占める空間と同体積の土の持つ慣性力に比べて飛躍的に大きくなり，細長い構造物ほど表層地盤より大きな地震力を受けることになり，耐震上不利であるといえよう。ところで表層地盤変位がその不均質性により受ける影響について図示したのが図 4.9 ( $N=1$  の場合)，4.10 ( $N=2$  の場合) であり，いずれも地表面の変位について均質地盤の場合と比較したものである。両図より分るように，不均質性が高まると ( $H_1/H$  が小さくなると) 共振点の位置が低周波領域側へ移動し，かつ均質の場合に比べてその共振点振幅は大きくなっ

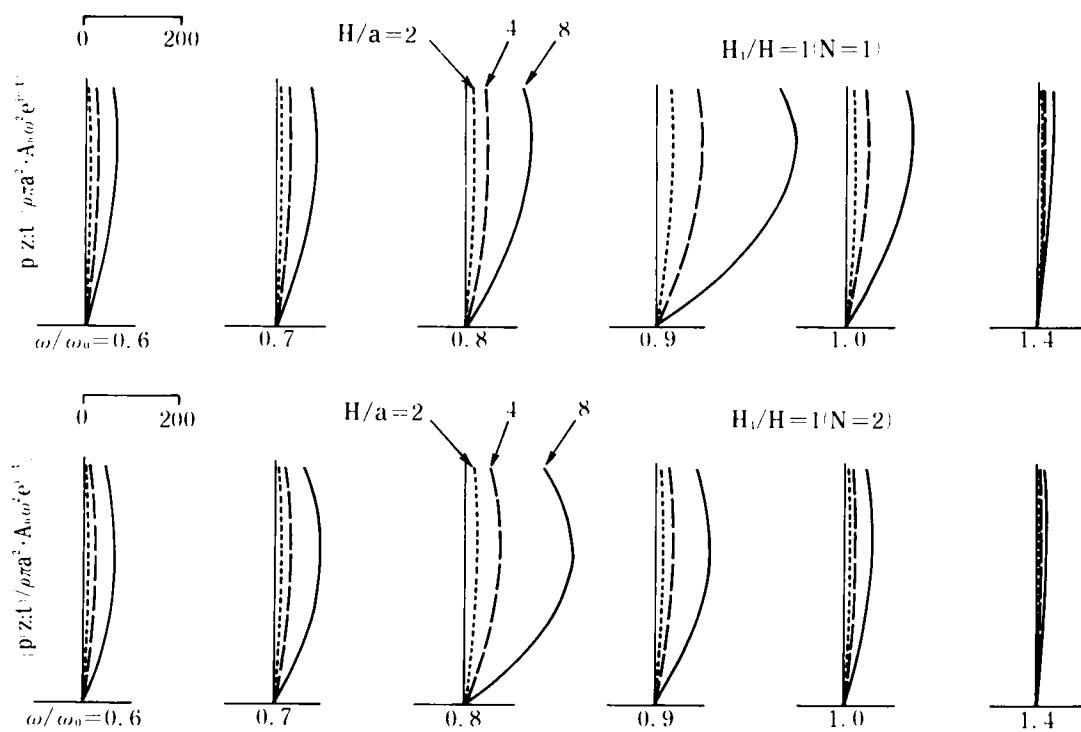


図 4.8 表層地盤の地震力の鉛直分布

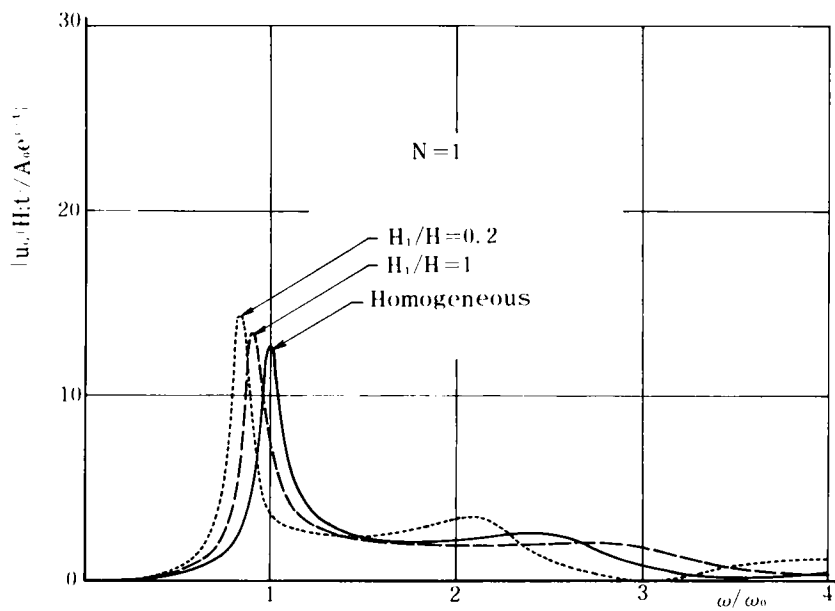


図 4.9 地表面変位振幅



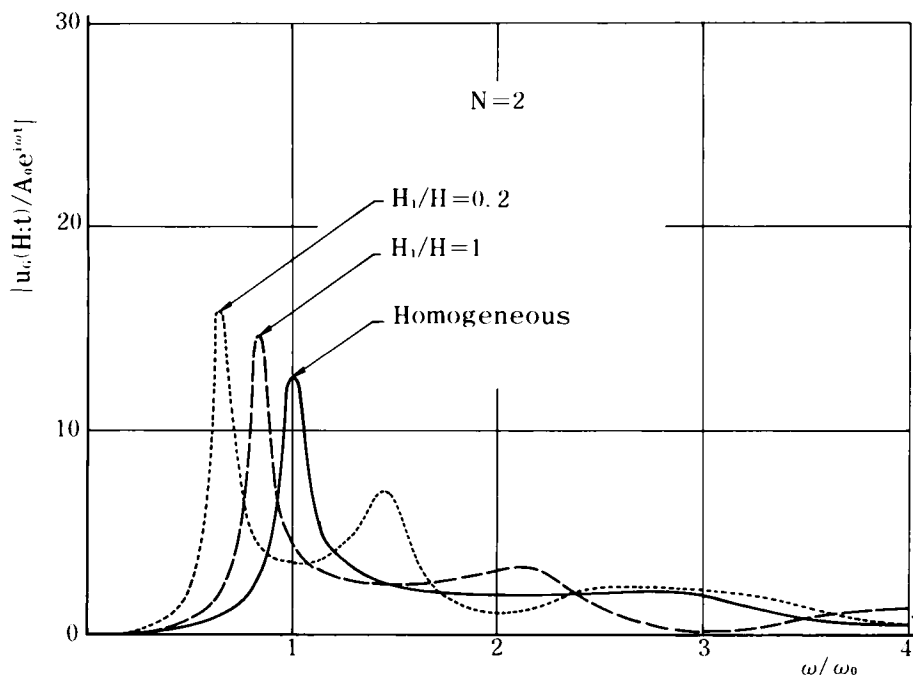


図 4.10 地表面変位振幅

ている。また先述のように高次の減衰が効くので、高周波領域側における共振振幅は1次のそれに比して相当小さくなるようであるが、概して  $H_1/H$  が小なるほど高次共振の影響が出やすいことを示している。このことは図 4.5 におけるように  $H_1/H$  が小なるほど高次モードが地表面近くに現われることとよく対応しているものといえよう。

一方、図 4.1 1 および図 4.1 2 は上記のような表層地盤変位が生じているときに、埋設剛構

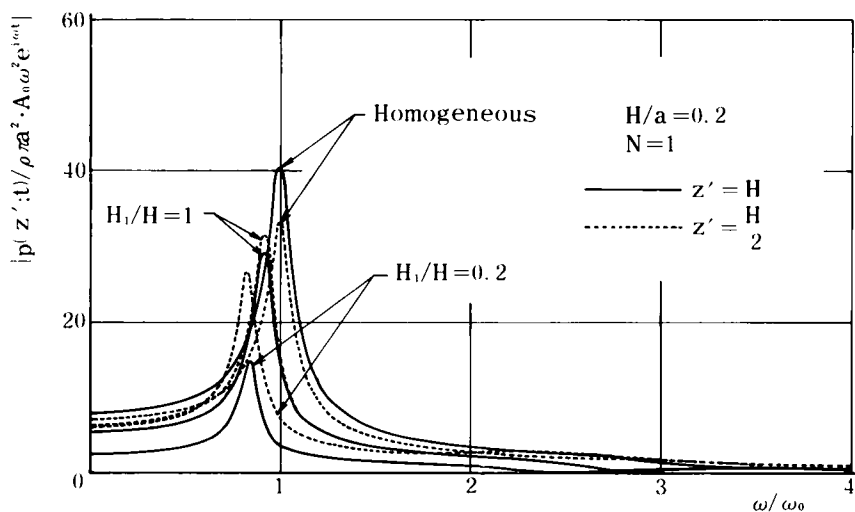


図 4.11 地震力の周波数応答

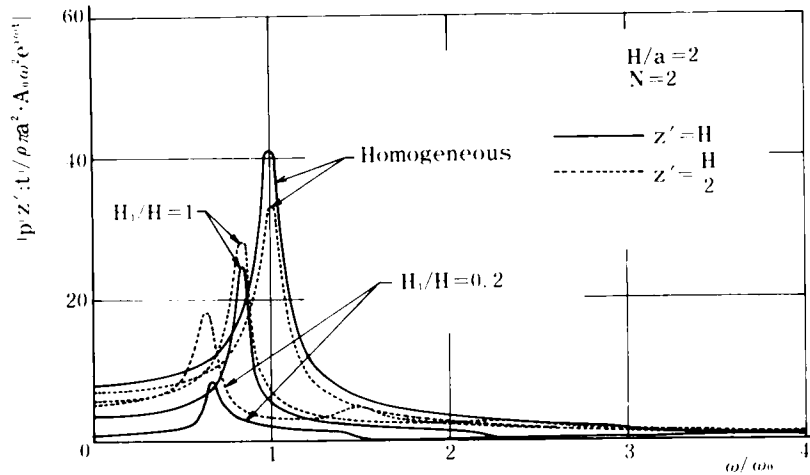


図 4.12 地震力の周波数応答

造物に作用する地震力  $p(z; t)$  を、地表面における値と表層地盤中間点におけるそれとを比較したもので、それぞれを図中に実線および点線で示してある。地震力  $p(z; t)$  は地盤の高次モードの影響をほとんど受けないで、表層地盤のせん断振動における基本円振動数での共振のみが重要であることを示しているが、一般に不均質性が高いほど ( $H_1/H$  が小なるほど)、 $p(z; t)$  の共振点圧力振幅は、 $H/a = 2$  なる同一地中構造物に対して小さいことが分る。このことは図 4.9 ( $N=1$ ) 4.10 ( $N=2$ ) の地盤変位振幅の傾向と全く逆になっており、均質地盤と異なる点でもある。さらにまた両図において同一地盤における場合の構造物に作用する地震力を地表面と表層地盤中間点とで比較してみると、均質地盤の場合は地表面における地震力の方が中間点のそれより大きく、これは地盤の変位の傾向と同じであるが、一方表層が不均質地盤の場合は逆に中間点の地震力の方が大きく、かつ  $H_1/H$  が小なるほどその傾向は著しくなるものといえよう。このように地盤に不均質性が存在するときは、地盤変位と地震力の鉛直分布傾向は一致せず、作用する地震力はほぼ図 4.5 の右端の図のような分布関数と基本モード形との積  $r(z') Z_1(z')$  に従って分布するので、注意を要しよう。

#### 4.5.2 地中構造物の動揺振動特性

堅い基盤の上に剛な構造物が支えられていることは、第 2 章の場合と同様であるが、この場合表層地盤の不均質性の如何によって、当然ながら式 (4.48) におけるように、振動中に表層地盤が構造物に対して持つ、ばね作用  $\chi(f_1 + if_2)$  および地震力  $\chi(g_1 + ig_2)$  が異なることになる。まず式 (4.45) で与えられる表層地盤と基盤との静的反力比  $\chi$  が不均質性  $H_1/H$  および構造形状  $H/a$  への依存の如何を示したのが図 4.13(a), (b) である。同図は分布関数が  $N=1$  に

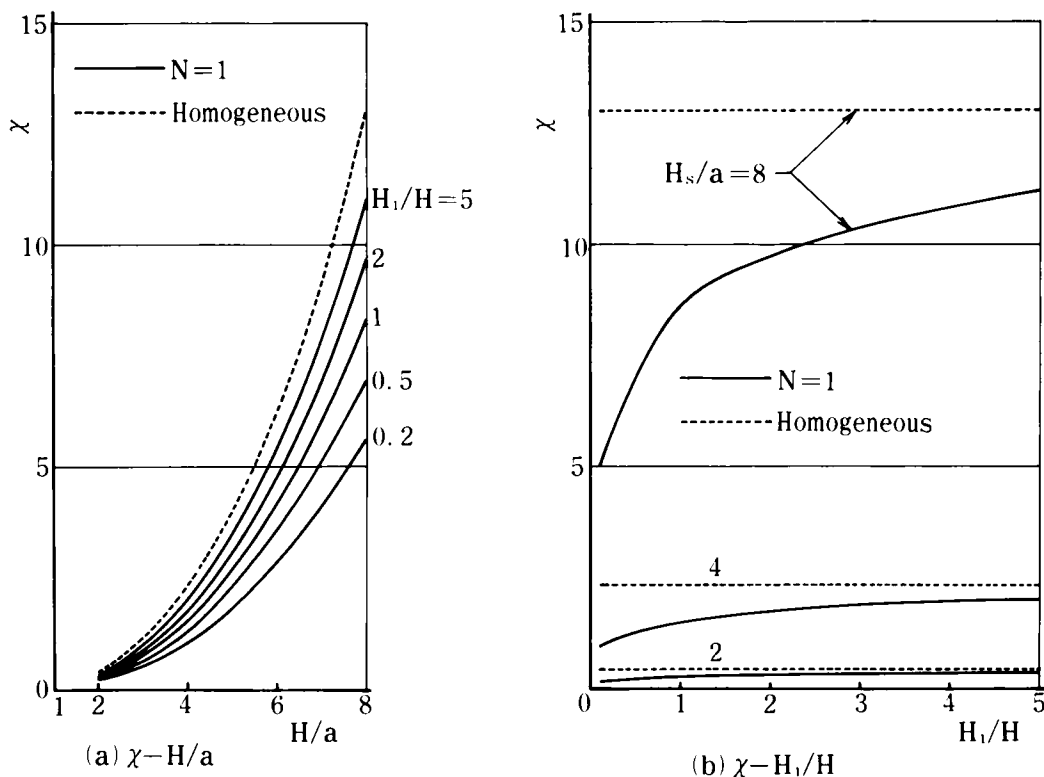


図 4.13 静的水平反力と底面反力との比  $\chi$

従う場合であって、(a)は静的反力比  $\chi$  と  $H/a$  の関係を示したもので、 $H/a$  が小すなわち断面が小さく細長くなると  $\chi$  は急速に増大する傾向は当然であろうが、不均質性が大なるほど、すなわち  $H_1/H$  が小なるほど  $\chi$  は小さく均質地盤が当然のことながら不均質地盤の上限値となっている。一方同図(b)は静的反力比  $\chi$  と不均質性  $H_1/H$  との関係を示したもので、 $H_1/H$  が増大するにつれて均質地盤の  $\chi$  に漸近しており、また均質地盤の  $\chi$  と不均質地盤の  $\chi$  との相違は  $H/a$  の大なるほど、すなわち細長くなるほど大きくなることは、前記(a)の傾向を裏付けている。

図 4.14、4.15 は表層地盤のばね作用の周波数特性  $f_1 + if_2$  を図示したものであるが、両図はそれぞれ分布関数  $\gamma(z)$  が  $N=1$  および  $N=2$  に従う場合である。全般的な傾向は第 2 章のそれと類似しており、実部  $f_1$  は  $0 \leq \omega/\omega_0 < 1$  の範囲では  $\omega$  に無関係な定数部のみならず、 $\omega^2$  にも関係しているので、第 2 章の説明と同様にこの周波数範囲では表層地盤がばねとしての作用のみならず質量作用をも合わせ持つことが示されている。さらに周波数領域  $\omega/\omega_0 > 1$  では  $f_1$  はほぼ一定値（正值）に落着く傾向にあり、このことは質量作用はほとんどなくばね作用のみが卓越してくることを示している。ここで実部  $f_1$  が第 2 章の楕円柱の場合では負の値となることもあったが、円柱状構造物にあっては決して負にならない、したがって表層地盤より構

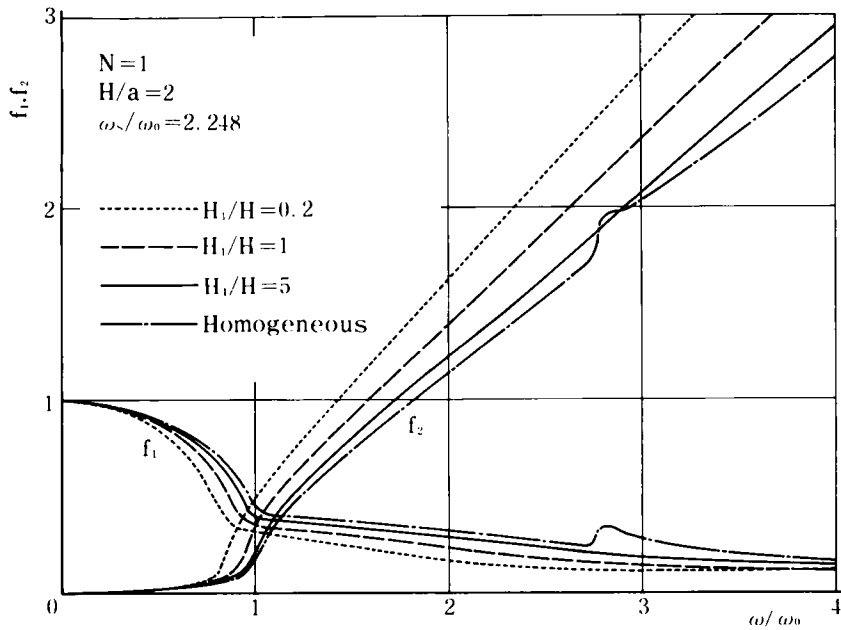


図 4.14 表層地盤のばね剛性の動的効果

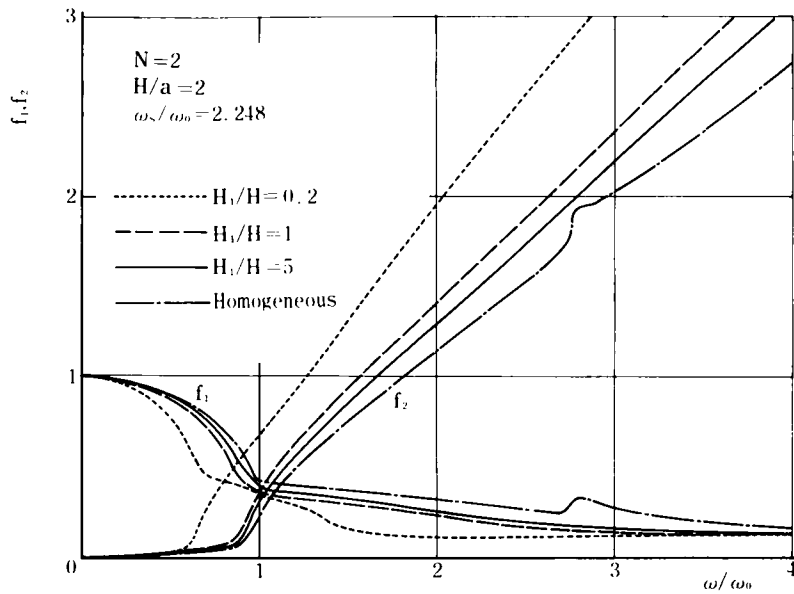


図 4.15 表層地盤のばね剛性の動的効果

造物の運動を抑制する正の反力が与えられる特徴があるようである。この場合の  $f_1$  は不均質性が大なるほど、その動的効果は減少することが言えるようである。一方虚部  $f_2$  は  $\omega$  が  $0 < \omega/\omega_0 < 1$  の範囲では構造物表面から散乱・放射される波動が表層地盤内を伝播しないので、この範

囲で存在する若干のこう配は内部減衰  $h_g$  ( $h_g = 0.05$ ) によることは明らかであり、 $H_1/H$  の如何にかかわらず一定こう配をとることからもよく分る。さらに  $\omega$  が  $\omega/\omega_0 > 1$  においては急激にそのこう配は大きくなり、不均質性が大なるほどその傾向は顕著になるが、ほぼ  $\omega$  に 1 次比例していると思われ、この波動の無限遠への逸散によって生ずる減衰効果が不均質地盤においても、第 2 章と同様に、近似的に粘性減衰の機構に換算しうることを示唆している。すなわち、このときの逸散減衰効果を粘性減衰定数  $h_{eq}$  に換算するには、第 2 章を参照すれば、

$$h_{eq} \cong \frac{\beta}{2} \cdot \chi \cdot \frac{\omega_s}{\omega_0}$$

として与えられるので、この換算減衰定数  $h_{eq}$  を均質地盤のそれと対比して一括表示したのが、表 4.2(a), (b) である。ただし  $\beta$  お

よび  $\omega_s$  はそれぞれ  $f_2$  曲線の  $\omega/\omega_0$

$> 1$  におけるこう配と構造物の固有円振動数であり、また  $\omega_0$  は基準円振動数であってこの場合は均質表層地盤のせん断振動における基本円振動数 ( $\omega_0 = \pi V/2H$ ,  $V$ : 均質地盤における横波伝播速度) によってある。また  $\omega/\omega_0 > 1$  に

表 4.2 換算減衰定数  $h_{eq}$

(a)  $H/a = 2$

$H_1/H$		0.2	1	5	Homogeneous
$h_{eq}$	$N=1$	0.263	0.328	0.378	0.409
	$N=2$	0.192	0.236	0.351	0.409

(b)  $H_1/H = 1$  ( $N=1$ )

$H_s/a$		2	4	8
$h_{eq}$	$N=1$	0.659	0.876	2.234

おける逸散減衰効果として  $f_2$  のこう配  $\beta$  には内部減衰  $h_g$  による効果も含まれているので厳密には  $h_{eq}$  は逸散減衰のみから構成されているわけではないが、一般に  $h_{eq} \gg h_g$  であるのでここでは内部減衰を含んだものを換算減衰定数  $h_{eq}$  とする。さて同表の(a)は地中構造物が  $H/a = 2$  の形状のとき不均質地盤における弾性定数等の分布関数  $r(z)$  が  $N=1$  および  $N=2$  に従う場合の、換算減衰定数  $h_{eq}$  と不均質性  $H_1/H$  との関係を示したものである。これより、不均質性が大きいほど、すなわち  $H_1/H$  が小なるほど  $h_{eq}$  は小さく換算され、 $N=2$  のように弾性定数の低下が急激な地盤ほどその傾向が著しいことが知られる。一方同表(b)は分布が  $N=1$  に従って、不均質性の指標が  $H_1/H = 1$  のように地盤条件が一定のときの、地中構造物の形状の差異による  $h_{eq}$  の影響を示したものである。構造物の  $H_s/a$  ( $H_s$ : 構造物の全高さ) が大すなわち細長くなるほど換算減衰定数  $h_{eq}$  は急速に大きくなることが知られ、遂には 1 を越える状態、すなわち過減衰の状態も存在することもありうることを示している。ただし  $h_{eq} > 1$  ということは構造物が振動しないということではなく、自由振動部分が存在しなくなることを示していると解

積すべきであろう。すなわち構造物の応答は式(4.48)からも分るように、分母の $\chi(f_1 + if_2)$ のみならず分子の地震力の効果 $\chi(g_1 + ig_2)$ で決まるものであって、表層と基盤の静的反力比 $\chi$ は先述の図4.13で $H_s/a$ が大なるときはきわめて大きいことが示されていたように、 $h_{eq}$ が大きいといえども応答が必ずしも低下するものではないと言えよう。

また地震力の動的効果 $g_1 + ig_2$ について示したのが、図4.16( $N=1$ )および図4.17( $N=2$ )である。均質・不均質地盤によらず外乱の振動数 $\omega$ がそれら地盤の基本円振動数 $\omega_1$ と一致するときに、表層地盤の共振時の地震力の影響はきわめて大きくなり、基本振動数より遠ざかるにつれて振幅は急速に減少し、第2章の傾向と同様に、この地震力の効果 $g_1 - ig_2$ は近似的に1自由度系の応答と同様であると見なしても差しつかえないようである。ただ $N=2$ の分布に従うときは $H_1/H=0.2$ のように不均質性が大きな地盤では2次共振の影響が若干生じているようであるが1次のそれに比べてそれほど大きくはなく、上述のように $g_1 - ig_2$ を近似的に1自由度系の応答と見なしてもよからう。

このように表層地盤のばね効果および地震力の効果を考慮したときの式(4.49)で与えられる構造物頂部の入力地震動に対する応答倍率を、弾性定数等の分布が $r(z)=H_1/H$ 、( $N=1$ )および $r(z)=(H_1/H)^2$ 、( $N=2$ )に従う場合について図示したのが、それぞれ図4.18、

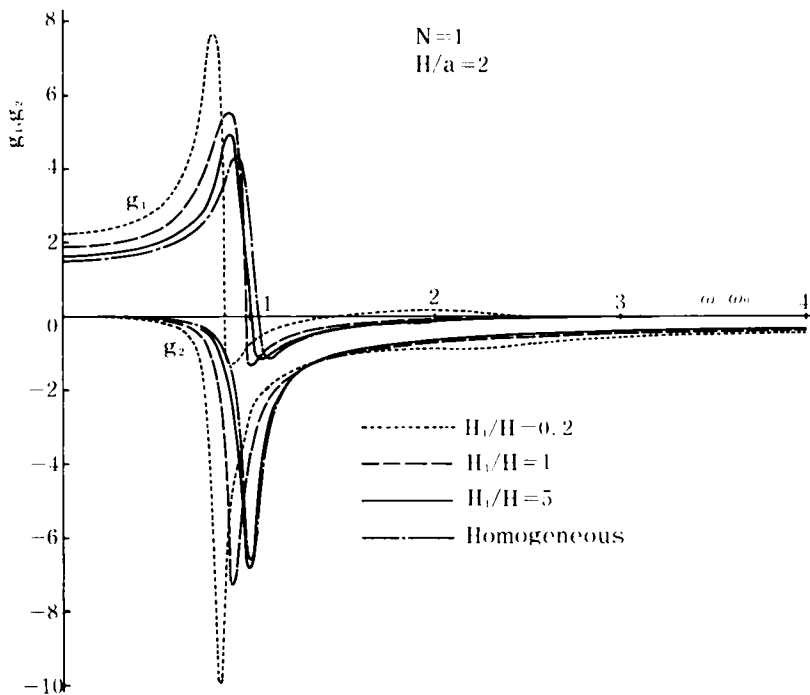


図 4.16 表層地盤の地震力の動的効果

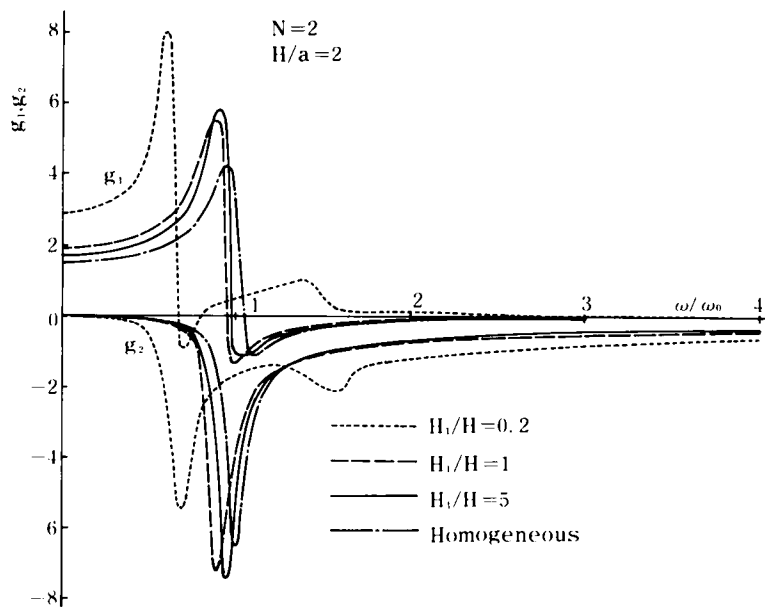


図 4.17 表層地盤の地震力の動的効果

図 4.19 である。この場合構造物の全長を  $H_s = H$  として表層地盤厚と一致させて、先述の  $c_1 = 2$  としたときは、構造物の固有円振動数  $\omega_s$  は  $\omega_s/\omega_0 = 2.248$  である。このとき、構造物

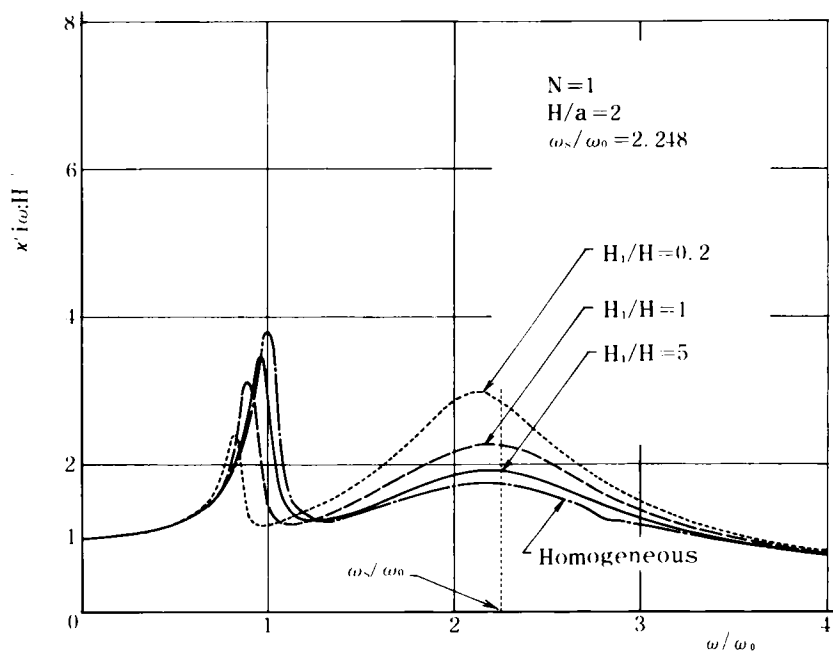


図 4.18 剛基礎の周波数応答倍率

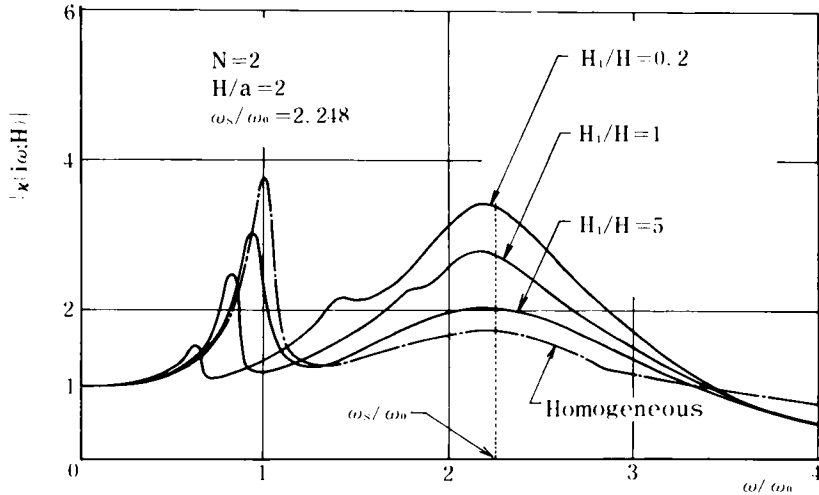


図 4.19 剛基礎の周波数応答倍率

は  $H_1/H$  が小すなわち地盤の不均質性が大なるほど、 $\omega$  が地盤の基本円振動数  $\omega_1$  の近傍での応答は小さく、それだけ表層地盤の影響が少ないことを示しているが、一方構造物の固有円振動数  $\omega_s$  での共振振幅は逆に大きくなるような傾向がある。このように地中構造物の変位応答においては、不均質性の指標  $H_1/H$  の変動による地盤の基本振動数での共振振幅と構造物自身の固有振動数での共振振幅の増減関係は互に逆の関係にあることが知られる。

#### 4.5.3 地中構造物の曲げ振動特性

ここで対象とする柔構造物としては、前記の図 4.3 のように円柱状構造物の上端に上載荷重のある場合のモデル (I) と上載荷重はないが地表面より上部へ突出しているような場合のモデル (II) である。この場合の構造物の固有円振動数  $\nu_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) と地盤の基準円振動数  $\omega_0 (= \pi V_0 / 2H)$  との比  $\nu_k / \omega_0$  は、式 (4.65) より地盤と構造物材料との密度比、弾性係数比等を総括したものを  $\alpha$  とすると、固有円振動数  $\nu_k$  は振動数方程式 (4.66) または (4.68) より得られる固有値  $\lambda_k H$  または  $\lambda_k L$  ( $k=1, 2, \dots$ ) に対して  $\nu_k = \alpha \cdot a / H \cdot (\lambda_k H)^2$  または  $\alpha \cdot a / H \cdot (\lambda_k L)^2$ , ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) として換算されるものである。一方、式 (4.65) の後者である構造物の  $k$  次モードに対する粘性減衰定数  $h_k$  は、定数  $\beta$  に対して  $h_k = \beta \cdot \nu_k / \omega_0$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) として換算され、これより高次モードほど減衰効果が大きく表われやすい。そこで構造物の固有円振動数  $\nu_k$  をその幾何学形状  $H/a$  に対する係数  $\alpha$  との比  $\beta = \alpha \cdot a / H$  に対して示したのが図 4.20 であるが、実線がモデル (I)、点線がモデル (II) についての  $\nu_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) である。この  $\beta$  が大きくなることは、構造物が外形的にずんぐりしてくるか、その剛性が高くな



ると考えればよいので、当然のことながら、 $\beta$ の増大とともに $\nu_k$ は増大している。ところでモデル(Ⅰ)では上載荷重と地中構造物の総重量との比 $W_H/W_D$ の変動に対する $\nu_1$ および $\nu_2$ の低下の割合はそれほど急ではないが、モデル(Ⅱ)では構造物の全長 $L$ と表層地盤厚 $H$ との比 $L/H$ によって、すなわち、地表面よりの突出の如何によって $\nu_k$ は大幅に変動するものであることを示している。本数値計算においてはモデル(Ⅰ)においては $\alpha=5$ 、 $\beta=0.01$ 、モデル(Ⅱ)では $\alpha=40$ 、 $\beta=0.01$ を与えている。また、たわみの展開係数

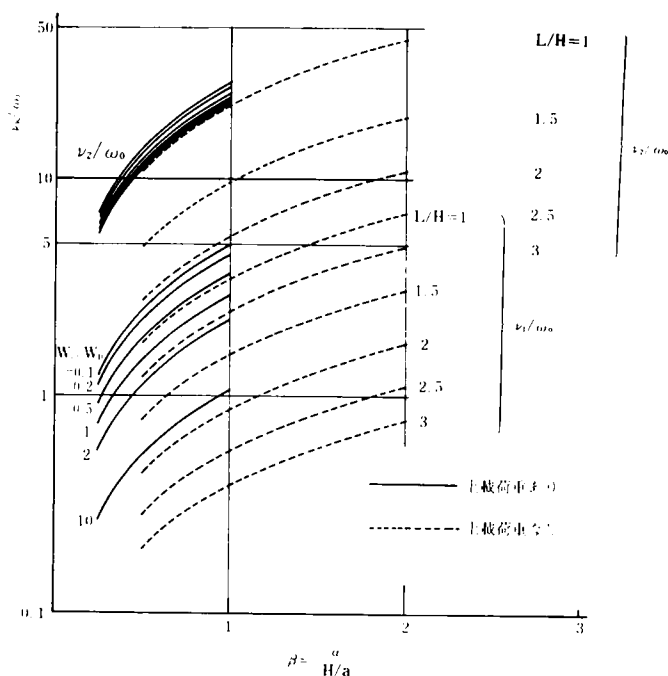


図 4.20 柔構造物の固有円振動数

$\{B_k\}$ を求める際には、近似式(4.75)にはよらないで、 $\{a_{lk}\}$ として式(4.70)を $(10 \times 10)$ の行列として直接求めた。

さて柔構造物においても、表層地盤の構造物に対する作用を近似的には剛構造物の振動においてなされたような、剛性効果と地震力の効果の2つに分けて考えることを、式(4.75)～式(4.78)に示したが、剛構造物に対する取扱いと異なるのは、柔構造物の各固有モードごとに地盤の剛性効果と地震力の効果が対応していることであろう。そこで図4.21～4.24はモデル(Ⅰ)と(Ⅱ)の構造物における表層地盤の剛性効果について、構造物の1次および2次モードに対するものを図示したが、当然 $\omega/\omega_0=0$ すなわち、これらの図の左端の $A'_{kk,1}$ は $k$ 次モードを静的に生ぜしめたときの地盤の剛性効果を表わしているわけである。なお以後の計算例における不均質地盤はすべて $N=1$ の分布に従うものを採用している。まず図4.21および図4.22はモデル(Ⅰ)に対するものであるが、前者は地盤の不均質性の影響による式(4.72)で示される剛性効果 $A'_{kk}$ の変動を実部 $A'_{kk,1}$ および虚部 $A'_{kk,2}$ に分けて示したもので、剛構造物の場合の図4.14および図4.15のそれぞれの $f_1, f_2$ に静的圧力比 $\lambda$ を乗じたものが、この $A'_{kk}$ に相当するものと言えよう。図4.21では1次モードに対する実部 $A'_{11,1}$ は均質な地盤ほど大きく、 $H_1/H$ が小さくなると剛性効果は急速に小さくなるが、その振動数 $\omega/\omega_0$ に対す

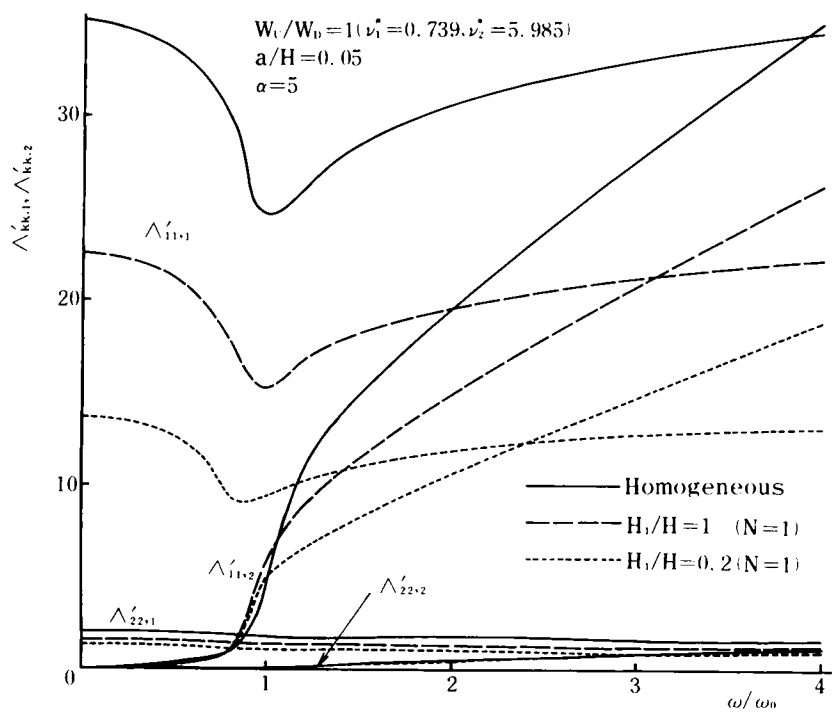


図 4.21 柔構造物に対する表層地盤の剛性効果

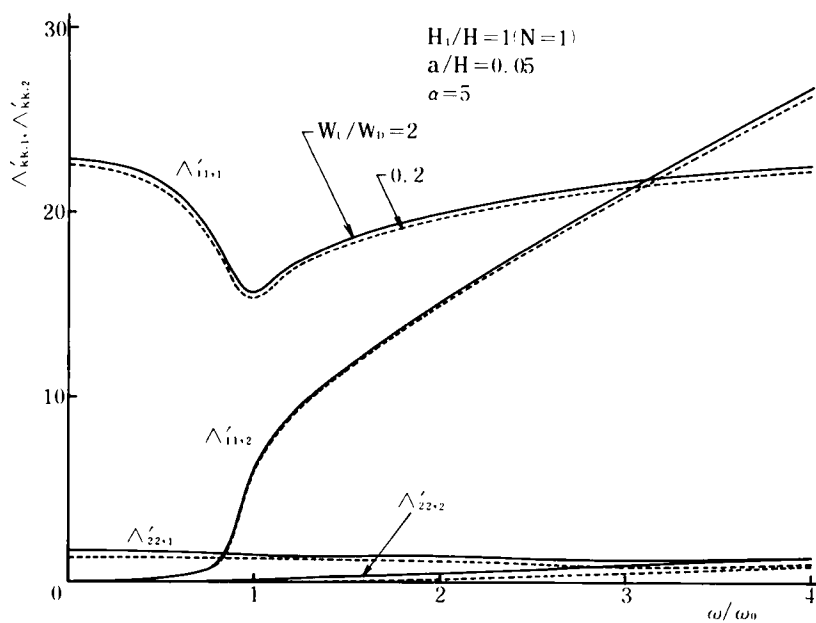


図 4.22 柔構造物に対する表層地盤の剛性効果

る動的な変動は互に類似していることが知られる。また不均質性  $H_1/H$  による 2 次モードにおける実部  $A'_{22,1}$  の傾向は  $A'_{11,1}$  のそれに従っているが値としては小さく互にそれほどの差異はないので、高次モードに対する地盤の剛性効果はきわめて小さくなることを示しているものと言えよう。一方 1 次モードにおける虚部  $A'_{11,2}$  は外乱の振動数が  $0 < \omega/\omega_0 < 1$  では緩こう配であるのは、構造物が剛な場合にも触れたように、内部粘性減衰のみによる影響であり  $\omega/\omega_0 > 1$  での  $A'_{11,2}$  には逸散減衰のみならず、この内部減衰をも含んでいることは言うまでもない。しかしながら、前者が後者に比べてきわめて大きいので  $\omega/\omega_0 > 1$  では後者を無視しても差しつかえなかろう。このように  $\omega/\omega_0 > 1$  ではやはり虚部  $A'_{11,2}$  は近似的に直線と見なしうるので、これを構造物の 1 次モードの粘性減衰に換算できるわけであり、同様に 2 次の虚部  $A'_{22,2}$  についてもその換算がなされうことは明らかであろう。しかしながら第 2 章においてもそうであったが、この  $\omega/\omega_0 > 1$  での  $A'_{kk,2}$  の直線部分はこの図の 0 点を通るとは限らないので、厳密には逸散減衰効果の虚数部  $A'_{kk,2}$  は振動数  $\omega$  に比例して増大する量のみならず、 $\omega$  に無関係な一定値とから成っていると言えようが、 $\omega$  の大きい領域で前者の占める割合が増すので実際上は後者の定数部を無視しても大過なかろう。ところでこの換算の仕方は式 (4.78) に示したように、 $A'_{kk,2}$  の直線部分のこう配の半分に、対応する構造物の無次元固有円振動数を乗ずるものであるから、高次モードのこう配が小さくとも  $k$  次モードに対する換算減衰定数  $h'_k$  は小さいとは言えないのである。図 4.22 はモデル (I) の上載荷重と下部構造物 (地中構造物) との重量比  $W_1/W_0$  による影響を示したものであるが、実部  $A'_{kk,1}$  および虚部  $A'_{kk,2}$  のいずれの場合もほとんど変化のないことが示されており、上載荷重の如何にかかわらず表層地盤が構造物の埋設部分に対する剛性寄与はほぼ一定であるといえるわけである。

一方図 4.23, 4.24 は上載荷重を持たない構造物が地表面より突出しているモデル (II) の場合について示したものである。前者の図では地上部と地中部の等しい構造物 ( $L/H = 2$ ) が、地盤の不均質性による影響について示したものであるが、モデル (I) の場合と同様に不均質性が高まると  $A'_{kk}$  の実部  $A'_{kk,1}$  はモデル (I) と同様に減少するが、構造物の 2 次モードに対する実部  $A'_{22,1}$  はモデル (I) の場合に比べて割合大きく、特に  $H_1/H$  が小なるときは  $A'_{22,1}$  は  $A'_{11,1}$  に比べてそれほど小さくはなく、高次振動モードに対する地盤の剛性作用も無視しえないことを示していよう。一方  $A'_{kk}$  の虚部  $A'_{kk,2}$  についても  $H_1/H$  による影響はモデル (I) と同様に不均質な地盤ほど逸散減衰効果は小さいことを示しており、特に 2 次モードに対する  $A'_{22,2}$  は  $A'_{11,2}$  に比べてそれほど小さくはなく、したがって固有円振動数  $\nu_k$  との積で得られる換算減衰定数  $h'_k$  はかなり大きな値となるであろうことが推察される。

次に図 4.24 は構造物の地上突出部の長さの影響について図示したものであるが、実部  $A'_{11,1}$

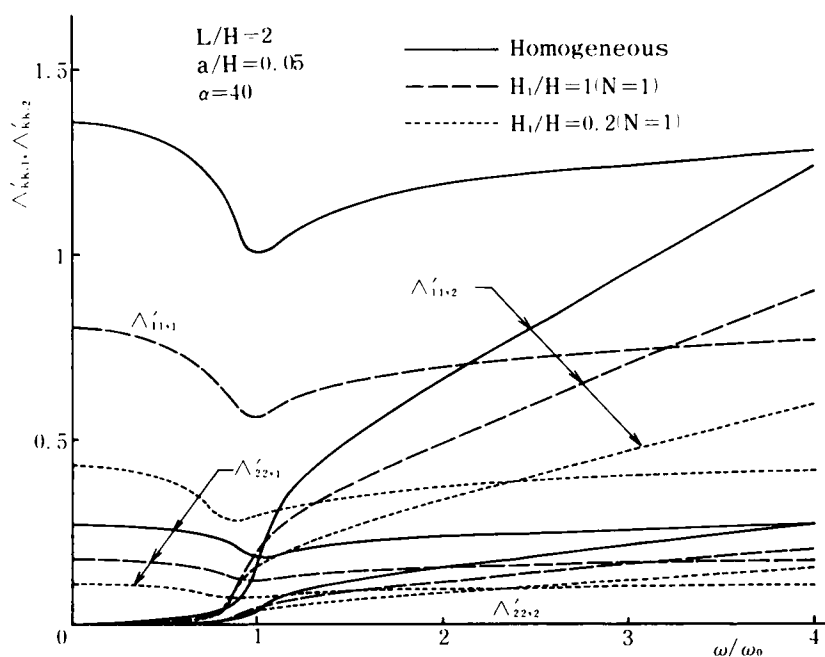


図 4.23 柔構造物に対する表層地盤の剛性効果

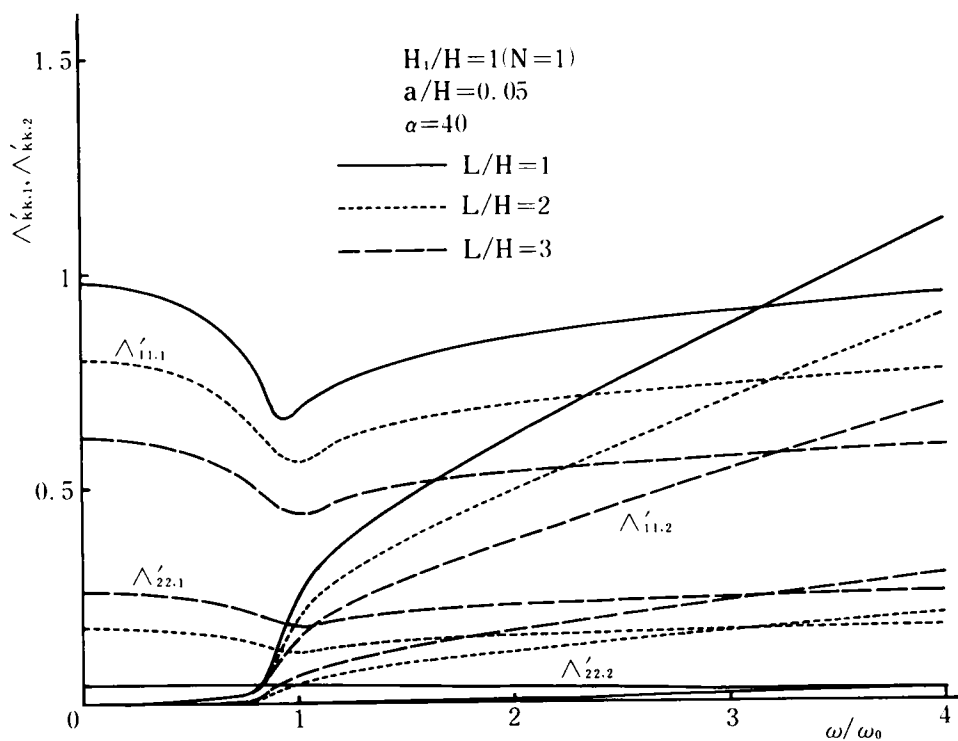


図 4.24 柔構造物に対する表層地盤の剛性効果

にあつては  $L/H$  が大なるほど、すなわち地上部分が長いほど表層地盤の剛性効果は低下するのに反し、2次モードに対する  $A'_{22,1}$  は逆に地上部分が短いほど剛性効果は大きくなっており、構造条件の影響を高次の  $A'_{kk,1}$  および  $A'_{kk,2}$  が大きく受けることは、モデル (I) のような構造形式の場合とは全く異なるものであることは注意を要しよう。さらに、虚部  $A'_{11,2}$  と  $A'_{22,2}$  についても実部の傾向と全く一致しているが、1次モードにおける場合は構造物の地上部分が短いほど  $A'_{11,2}$  のこう配  $\beta$  も大きく、かつ構造物の固有円振動数  $\nu_k$  も大きいので、地上部分が短いほど1次モードに対する逸散減衰効果の換算減衰定数  $h'_1$  はきわめて大きく算出されようが、一方2次モードに対する場合は地上部分が短いほど  $A'_{22,2}$  のこう配  $\beta$  は小さいので  $\nu_k$  との兼ねあいを考えると、地上部分の如何による換算減衰定数  $h'_k$  の大小関係は明確ではないが、互に大差ない値として得られるであろうことが分る。

このように逸散減衰の効果が近似的には構造物の固有モードごとの減衰定数  $h'_k$  ( $k=1,2,\dots$ ) として換算しうるものであることを知ったが、式 (4.78) にもとづいて算出したこれらの  $h'_k$  を一括表示したのが表 4.3 (a),(b) であつて、同表の(a),(b) はおのおの上載荷重のある場合 (モデル (I)) とそれのない場合 (モデル (II)) である。ただし式 (4.77) における地盤の剛

表 4.3 換算減衰定数  $h'_k$

(a) 上載荷重のある場合

(b) 上載荷重のない場合

$W_U/W_D = 1$			
$H_1/H$	0.2	1	Homogeneous
$h'_1$	1.496	2.024	2.766
$h'_2$	0.966	1.123	1.324
$h'_3$	0.0035	0.0028	0.0032

$L/H = 2$			
$H_1/H$	0.2	1	Homogeneous
$h'_1$	0.112	0.171	0.251
$h'_2$	0.180	0.236	0.313
$h'_3$	0.105	0.118	0.131

$H_1/H = 1 \quad (N=1)$			
$W_U/W_D$	0.2	1	2
$h'_1$	3.129	2.024	1.568
$h'_2$	1.071	1.123	1.155
$h'_3$	0.0029	0.0028	0.0029

$H_1/H = 1 \quad (N=1)$			
$L/H$	1	2	3
$h'_1$	0.844	0.171	0.059
$h'_2$	0.431	0.236	0.155
$h'_3$	0.055	0.118	0.154

性効果の虚部  $A'_{kk,2}$  のこう配  $\beta_k$  は直線部分と見なされる  $\omega/\omega_0=3$  および 4 における  $A'_{kk,2}$  の値から算出したものである。(a),(b) における上位の表は構造物の幾何学形状を一定にしておいて、地盤の不均質性  $H_1/H$  に対する  $h'_k$  の影響を見たものであるが、構造物の1次および2次モードに

対する換算減衰定数  $h'_k$  は、均質な地盤の方が不均質地盤の場合より大きな値となり、 $H_1/H$  が小なるほど  $h'_k$  は小さい。さらに、これら上位の表において(a)の上載荷重のある場合では、 $h'_k$  は次数の増大とともに減少していくが、 $h'_k > 1$  の場合はその次数のモードに自由振動部分が存在しなくなり、これはいうまでもなく過減衰の状態を意味している。この場合の  $h'_3$  はその理由は定かではないが、急激に減少し地盤の不均質性の如何にかかわらずほとんど0に近い値をとっている。一方、(b)における上位の表ではすべての換算減衰定数が  $h'_k < 0.4$  であって、(a)の場合のそれらに比べてかなり小さい。この(b)の上載荷重のない場合では  $h'_2 > h'_1$  の関係があるが、(a)の場合と異なり次数とともに  $h'_k$  は漸減する傾向はなく、1次および2次モードに対する  $h'_k$  に関しては(a)の場合の対応する  $h'_k$  の値より小さいようであり、それだけ上載荷重のない構造物の応答が大きいことの1つの目安ともなる。

次に(a),(b)における下位の表においては、不均質地盤 ( $N=1, H_1/H=1$ ) において、それぞれ上載荷重と下部(地中部)の重量比  $W_U/W_D$  および構造物の全長と地中部分の長さの比  $L/H$  の変化に対する  $h'_k$  の影響を示したものである。(a)においては、3次モードに対する  $h'_k$  はほとんど変化なくきわめて小さいが、 $h'_1$  および  $h'_2$  はいずれも1より大きく過減衰の状態になっており、上載荷重が軽くなるほど  $h'_1$  は増大するのに反し、 $h'_2$  は若干減少している。このように上載荷重が軽いほど1次モードは表層地盤より大きな減衰作用を受けることを示している。一方(b)における下位の表においては  $L/H$  が大きいとき、すなわち地上部分が長い構造物では、 $h'_1$  がそれより高次のものに比べてかなり小さく、それだけ1次のたわみが大きく出やすい条件にもなるが、 $L/H$  が1に近づくにつれて逆に1次モードの  $h'_1$  が大きくなり、その大小関係が逆転している。また  $h'_1$  および  $h'_2$  はそれぞれ  $L/H$  が小なるほど大きくなるが、 $h'_3$  では逆に小さくなる傾向を持っているようである。以上のように概して、表層地盤が均質であるほど、上載荷重が軽いほどあるいは地上突出部分が短いほど、低次モードに対する換算減衰定数  $h'_k$  は大きくなることが分ったが、前述のように構造物の応答は表層よりの地震力の効果に大きく依存するので、この  $h'_k$  の大小がそのまま応答の大小に反映するとは限らないことは注意すべきであろう。

そこで表層地盤よりの地震力について示したのが図 4.25 ~ 4.28 である。そのうち図 4.25, 4.26 は上載荷重のある場合について示したものであり、図 4.25 より均質な地盤に近いほど表層より大きな地震力を受けやすい傾向にあることが分る。さらに高次モードに対する地震力は図中にその2次のものを示しているが、その1次モードに対する地震力との差は非常に大きく、その他の高次モードのものは、先述の表 4.1 の数値計算例でも見るように、急速に次数とともに減少していく。図 4.26 では地震力  $q'_1$  は上載荷重の大なるほど大きく作用することを

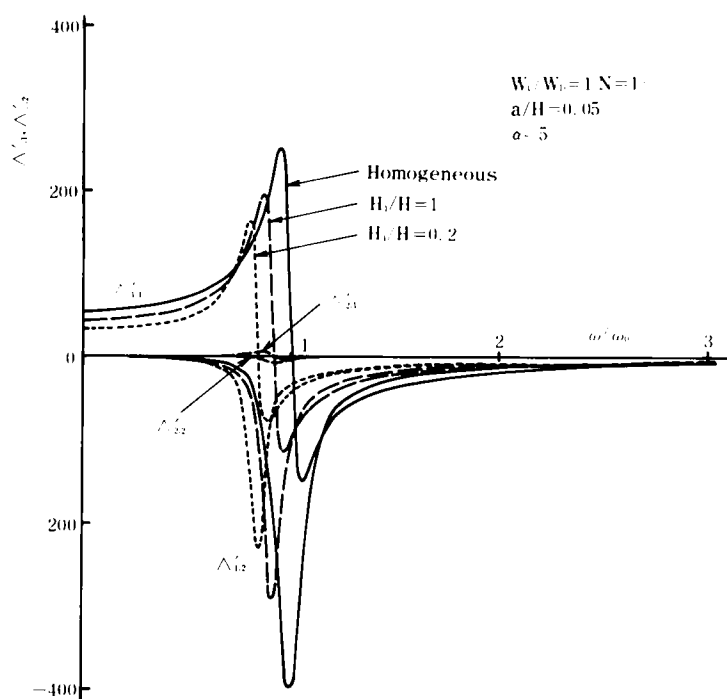


図 4.25 柔構造物に対する表層地盤の地震力

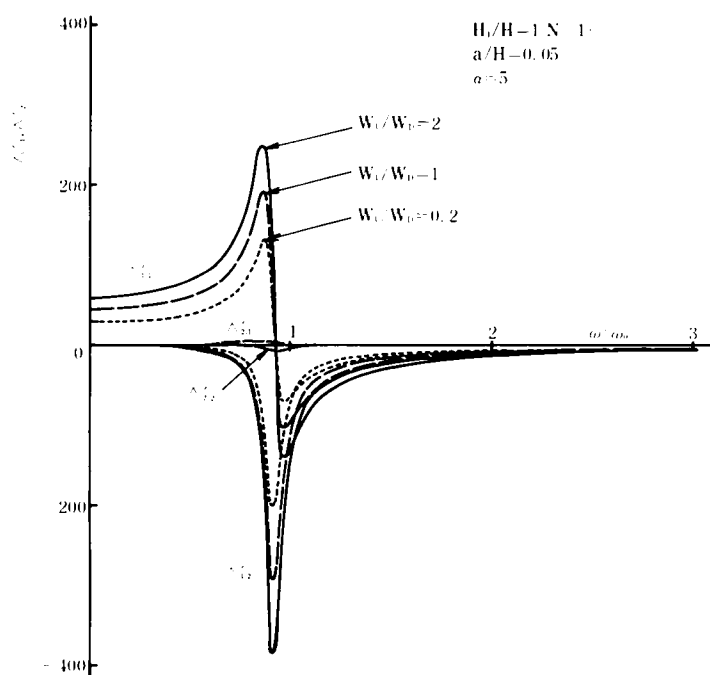


図 4.26 柔構造物に対する表層地盤の地震力

示しているが、これは表層の動きにそれだけ追従しにくい構造物であるとも解されよう。一方図 4.27, 4.28 は上載荷重がなく構造物が地上にそのまま突出している場合についての地震力を示しているが、図 4.27 よりやはり均質な地盤ほどその地震力  $A'_l$  は大きく、 $H_1/H$  の減少とともに  $A'_l$  は減少することを示している。さらに図 4.28 は地上部分が長くなるほど ( $L/H$  が大なるほど) 地震力  $A'_l$  は大きくなっているが、これは  $L/H$  が大きいと構造物の地上部の動きが表層のそれに反発するために、見かけ上地震力が大きくなるのであって、図 4.26 の上載荷重の大なる場合の傾向ともよく対応していることが知られる。この上載荷重のない構造物にあっても、2 次モードに対する地震力は同様に 1 次のそれに比べて小さく、それ以上高次モードに対する地震力は無視しうる程度のものと言えよう。

さて、これらの表層地盤の種々の作用を考慮したときの構造物の応答について示したのが以後の図であるが、まず図 4.29 および図 4.30 は構造物の共振点付近のたわみと曲げモーメントの鉛直方向分布に関するものである。前者の図は上載荷重のある場合であって、上側の図は表層地盤のみの場合の水平変位の絶対値 (点線) とその中に埋設されている構造物のたわみの絶対値 (実線) とを、下側の図は構造物に生ずる曲げモーメントである。このように表層地盤の共振点の前後では  $H_1/H=0.2, 1$  の不均質地盤と均質地盤における周辺の地盤と構造物の変位はほとんど一致しており、構造物は地盤によく追従して動いていることが知れるが、一方曲げモーメントは、この構造物は上、下端がそれぞれ構造物と基盤に固定されているので、上下端で大きくなっており、このように地盤によく追従している構造物は共振点前後で地盤の位相が急変することの影響をそのまま受けて、この曲げモーメントもその位相が逆転していることがよく示されている。一方図 4.30 の上載荷重のない構造物にあっては、地盤の不均質性の如何にかかわらず、地中部分の変位は周辺地盤のそれよりもむしろ小さく、前図の傾向とかなり異なっている。この差は恐らく対象とする柔構造物が上載荷重のある場合とない場合とで  $\alpha$  の値をそれぞれ 5.40 としているので、相対的に前者がかなりたわみやすく固有振動数が低い構造物であったのに対し、後者がそれに比して自身の剛性が大きいため周辺の地盤に抗している結果であろう。また当然ながら、この構造物の地上部分は開放されているために当然曲げモーメントはほとんど発生していないが、その下端は固定されているので、上載荷重のある場合と同程度の曲げモーメントが発生していることがうかがえる。

以上の現象を周波数領域において見るために、構造物の上端における水平変位の周辺数応答倍率を示したのが図 4.31 ~ 4.34 である。まず図 4.31, 4.32 は上載荷重のある場合であるが、図 4.31 より不均質性の大きい表層地盤における方が共振時の応答倍率  $|\kappa(i\omega; H)|$  は大きい、これは表 4.3(a)において、 $H_1/H$  が小さいほど換算減衰定数  $h'_k$  が小さく、かつ



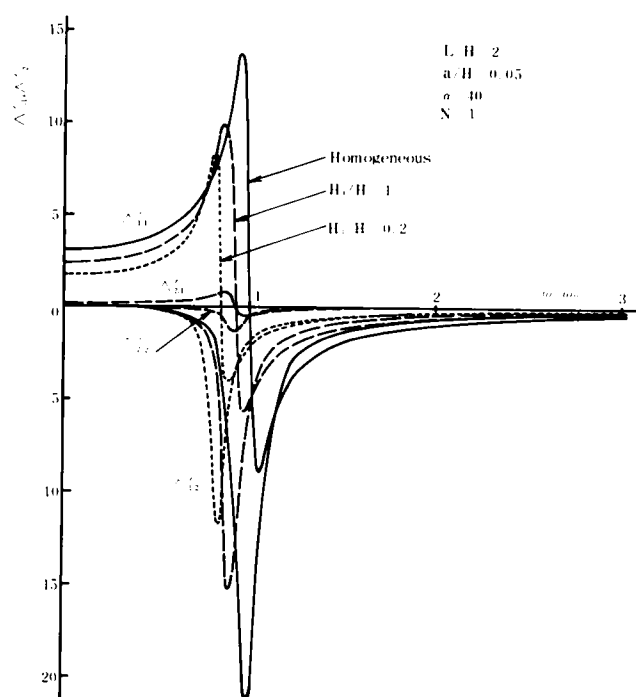


図 4.27 柔構造物に対する表層地盤の地震力

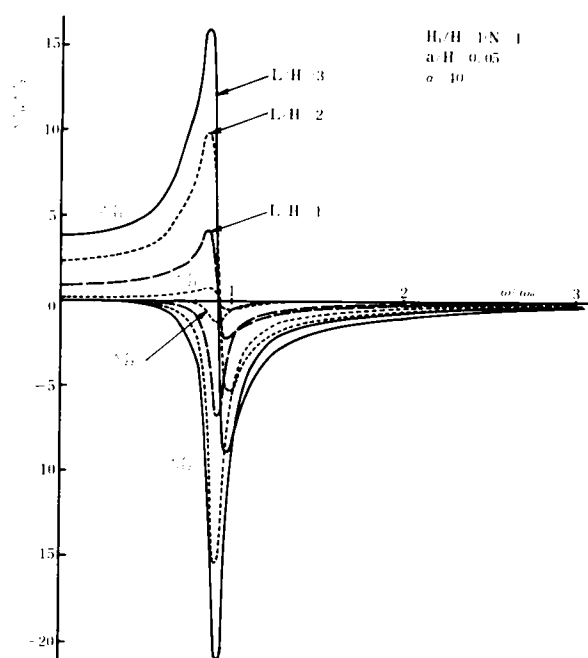


図 4.28 柔構造物に対する表層地盤の地震力

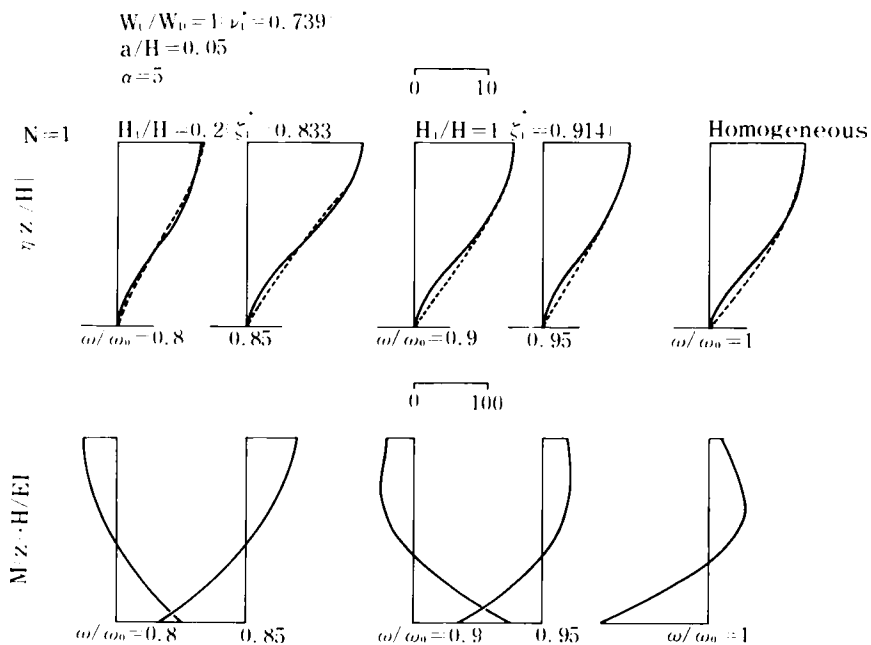


図 4.29 柔構造物のたわみと曲げモーメントの鉛直分布

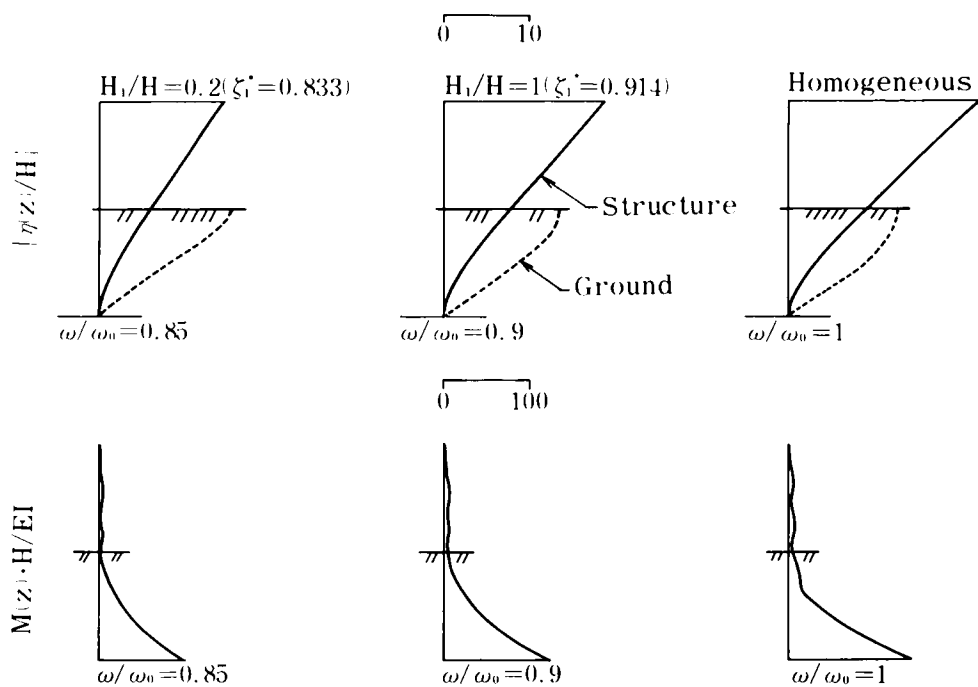


図 4.30 柔構造物のたわみと曲げモーメントの鉛直分布

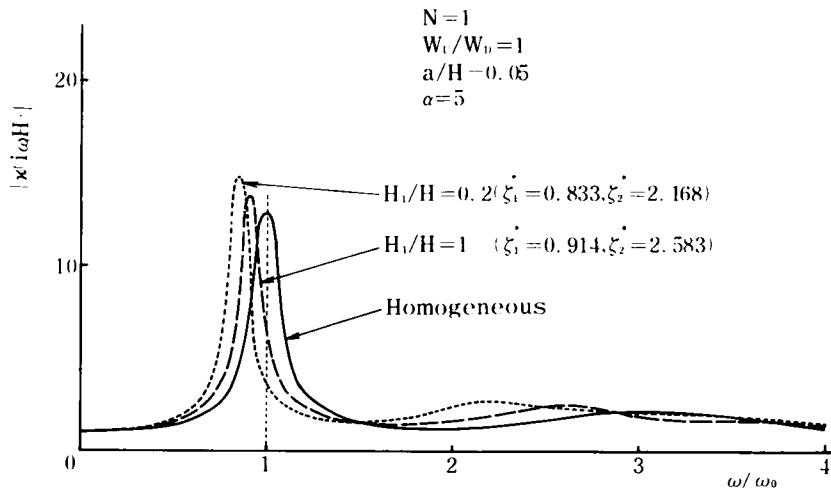


図 4.31 構造物頂部の周波数応答倍率

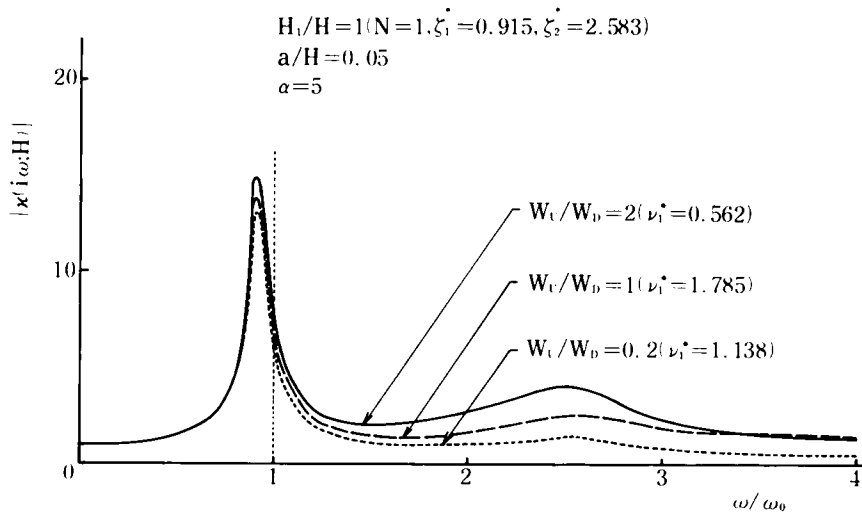


図 4.32 構造物頂部の周波数応答倍率

図 4.2 1 のように表層地盤の剛性効果が低いということで説明されるかもしれない。また上載荷重を持つ構造物の高次共振の影響は小さく無視しうるものであることが分る。図 4.3 2 は上載荷重の効果を示したものであるが、全般に上載荷重が大きいほどその応答は大きいという傾向があるようであるが、これは図 4.22 より剛性効果はほぼ一定ということと、図 4.26 の表層よりの地震力の傾向から十分納得されよう。

一方図 4.3 3, 4.3 4 の上載荷重のない場合であるが、図 4.3 3 より表層の不均質性の小なるほど応答は大きいことが知られ、表層の 2 次共振の影響もかなり大きいことが特徴であろう。しかしながら構造物の固有振動数に対応する共振が存在しないのは、上載荷重のある場合と同

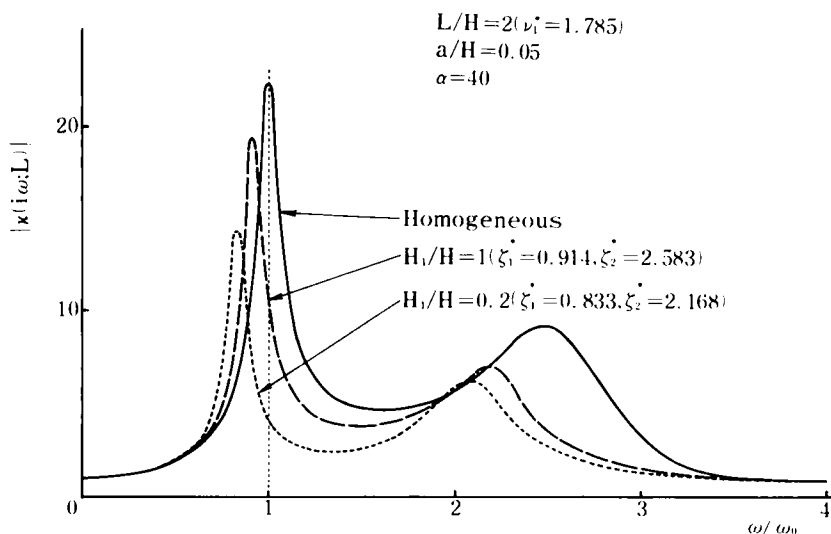


図 4.33 構造物頂部の周波数応答倍率

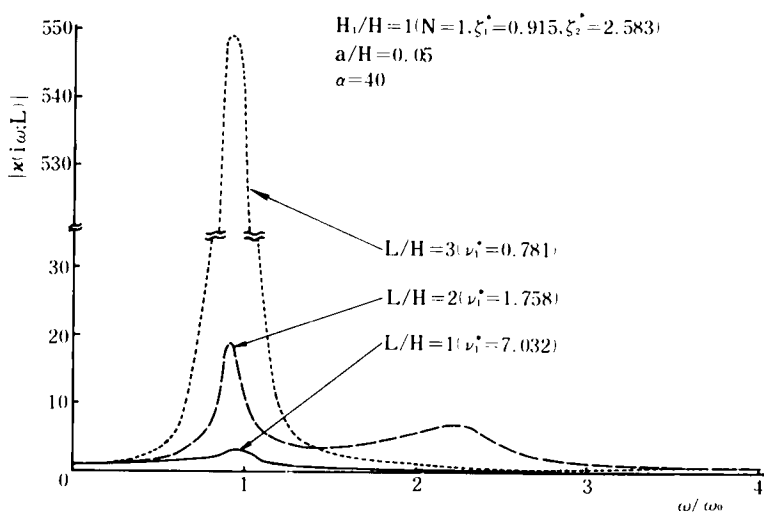


図 4.34 構造物頂部の周波数応答倍率

様であり、地中構造物は地盤に対してほとんど影響を及ぼし得ないことが知られる。また地盤の不均質性が大きいほど構造物の応答が小さいのは、図 4.27 の地震力の大小関係とはよく対応しており、図 4.23 において  $H_1/H$  が小なるほど表層地盤の剛性が低下し、表 4.3(b) のようにそれだけ減衰効果が小さくなるという、理由によるものであろう。さらに図 4.34 は構造物長と埋設深さとの関係が上端点の応答に与える影響を示したものであるが、 $L/H=3$  の場合は空中部分が地中へのその 2 倍も無拘束で露出しているので、当然その変位は非常に大きくな

っている。いずれにしても、このように地上突出部分の多い柔構造物の場合では、それを取りまく地盤の働きが図 4.24 のように剛性低下とともに、表 4.3 のように 1 次モードに対する逸散減衰効果が低下し、かつ図 4.28 のようにきわめて大きな側圧としての地震力を及ぼすことになるので、設計上十分に注意すべきである。

さてこのような構造物の応答時に生ずる曲げモーメントの絶対値について示したのが、図 4.35 ～図 4.38 であるが、図 4.35、4.36 の上載荷重のある場合は先述のように地中構造物の上下端の曲げモーメントが当然大きく、地盤の不均質性のそれに及ぼす影響を図 4.35 に示してある。ところで図 4.31 の例においても見たように、水平変位の応答に対する表層地盤の 2 次の共振の影響は顕著ではないにもかかわらず、この図 4.35 のように周辺地盤の 2 次の共振はきわめて大きな曲げモーメントを生起せしめており、上端の曲げモーメントは  $H_1/H$  が小なるほど大きく、下端の曲げモーメントは表層の 1 次の共振の場合は、均質地盤における方が大きく、2 次の共振による場合は 1 次の場合の半分以上となっている。この計算例のように上下端の曲げモーメントは地盤の 1 次および 2 次の共振時の挙動とは互に逆の傾向にありうるので設計計算上において単一のモードに対する配慮だけでは不十分であって、構造物に十分な耐力を持たせられるような配慮がなされるべきであろう。さらに図 4.36 は上載荷重の大小による曲げモーメントに与える影響を図示したものであるが、上端の曲げモーメントは 2 次の共振の影

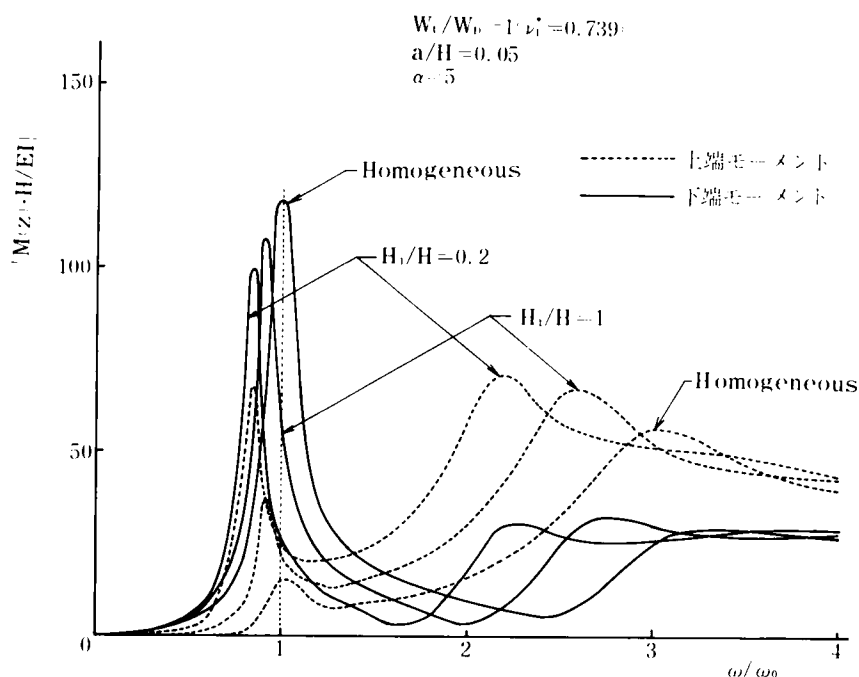


図 4.35 構造物上下端の曲げモーメント

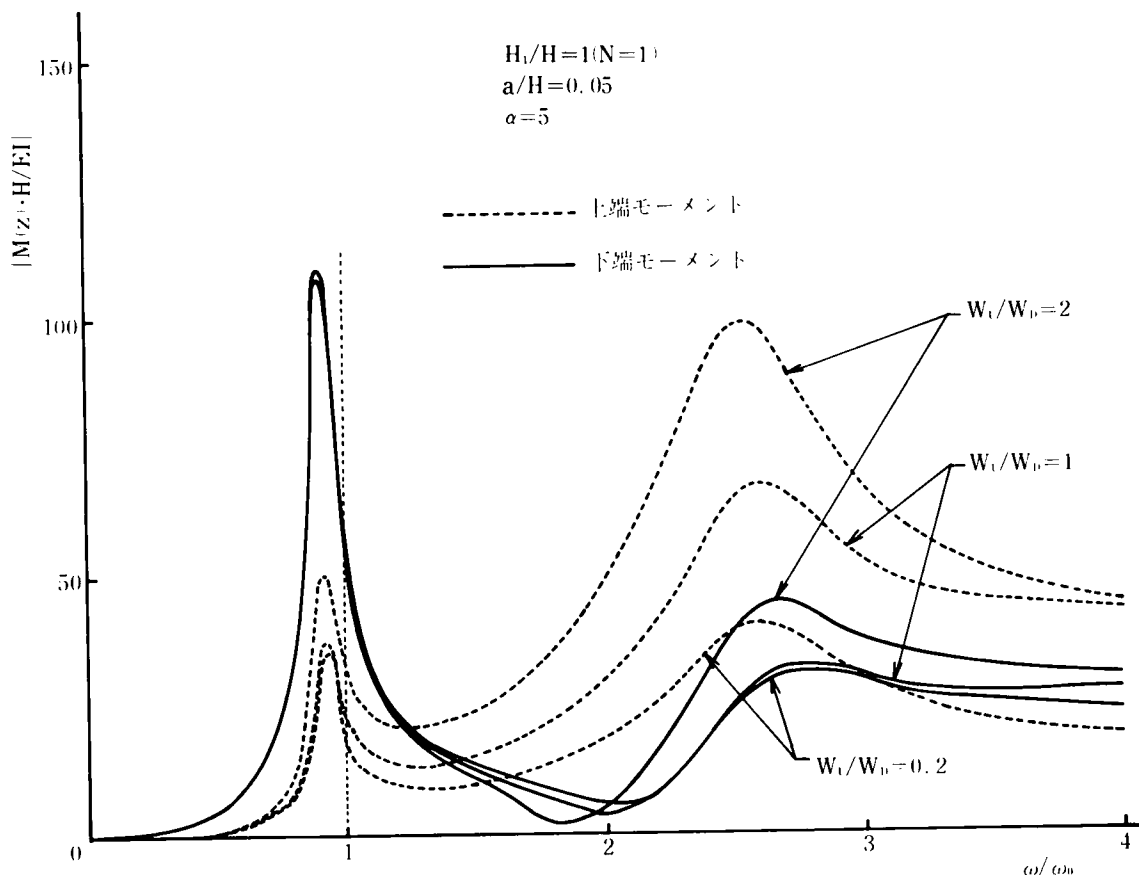


図 4.36 構造物上下端の曲げモーメント

響が大きいことは前述のとおりであるが、上載荷重の大なるほどその傾向は著しいことを示しており、これは図 4.32 の 2 次共振の大小関係をそのまま反映しているようである。一方下端の曲げモーメントは当然 1 次の共振時の影響が大きい为上載荷重の大小はほとんど影響しないことを示しており、2 次の共振時の  $W_t/W_0$  の差による影響もそれほど大きくはない。

一方地表面上に突出した部分が無拘束の場合は当然曲げモーメントは下端のみしか重要ではなく、その挙動を図 4.37、4.38 に示してある。図 4.37 より下端モーメントは、周辺の地盤が均質なほど大きく、先の上載荷重のある地中構造物の傾向とよく一致していることが分る。さらに無拘束の地上突出部分が長いほど、構造物の空中部分の大きな応答がその下端にまで影響を及ぼすことが当然考えられるわけであり、その効果が図 4.38 によく示されているといえよう。

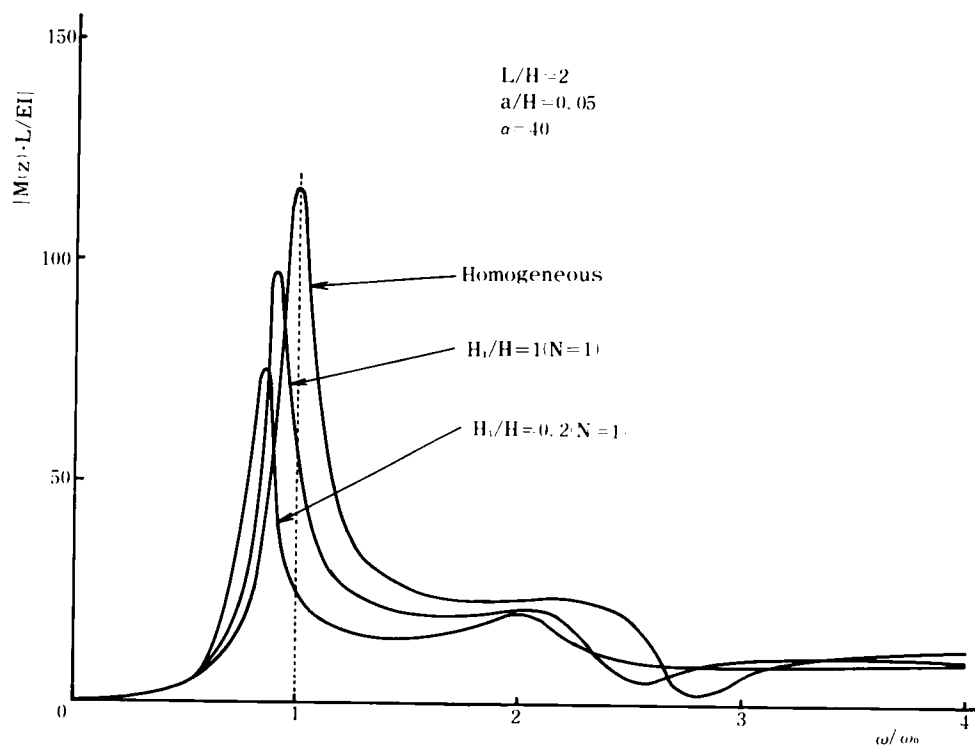


図 4.37 構造物下端の曲げモーメント

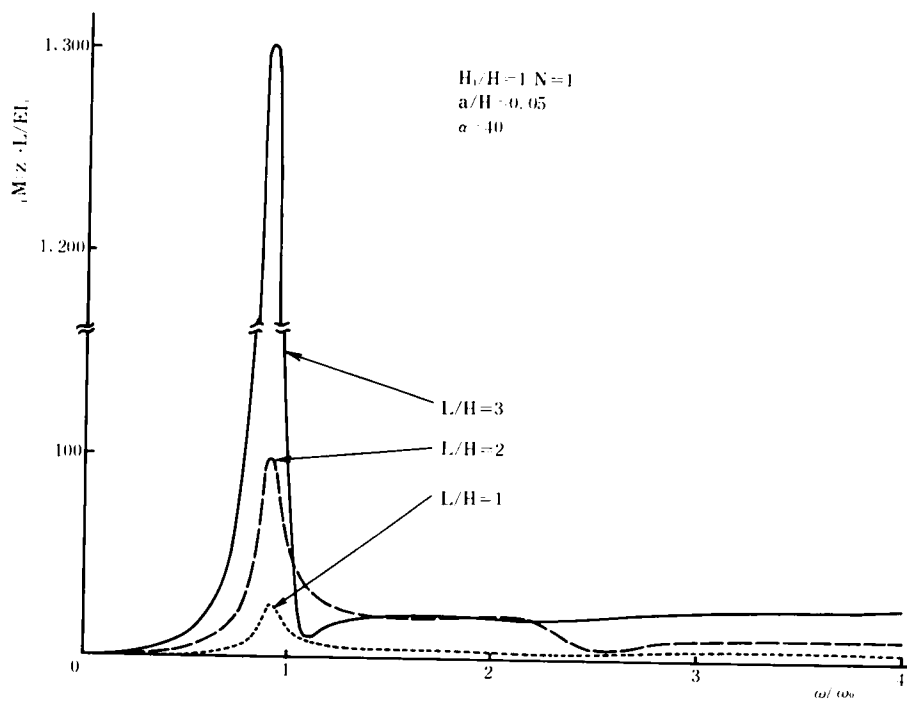


図 4.38 構造物下端の曲げモーメント

#### 4.6 結 言

本章においては、地盤の不均質性を、表層地盤の弾性係数あるいは粘性減衰係数が深さのべき乗に比例した一価関数として解析表示できるとし、基盤面においてこれらの計算値が均質地盤のそれと一致し、地表面に近いほど均質地盤よりの低減の割合が大きいと定義した。ここではこの弾性係数の分布関数として深さの1乗あるいは2乗に比例して変化するものを選んだが、もちろん深さの $N$ （整数）乗に従って変化する場合についても、同様にして解析解を導き出すことは可能であるが、ここでは上記の2つの場合で十分地盤の不均質性による動向を考えうるものとして省略した。本解析のように、堅い基盤の弾性変形を考慮しないとき、すなわち、表層より基盤内への波動の透過を考えないモデル地盤においては、結局表層地盤の固有値・固有関数を解析的に導き出せれば、以後の地中構造物の周波数応答解析は第2章と同様な手順に従って行ないうることが示された。このような均質地盤を含めた不均質地盤の挙動およびその中に堅い基盤まで根入れされた剛あるいは柔な基礎構造物の周波数応答に関して本章においてえた成果は以下のように要約される。

- (1) 不均質性の高い地盤ほど、その高次モードの影響がより地表面近くに現われ、地中構造物に作用する周辺地盤の地震力の最大作用点は下方に移動する。かつ不均質地盤における地震力の分布形は、弾性係数等の分布形と表層地盤の1次モード形との積でもって近似しうる。
- (2) 剛構造物に対する周辺地盤の作用は、均質地盤の場合と同様に静的な場合に比べてその動的剛性効果は低下し、かつ逸散による減衰効果も低下するが、その傾向は不均質性が大なるほど著しい。
- (3) 不均質性が大きいと、剛構造物への表層地盤の共振の及ぼす影響が薄れ、逆に構造物の固有振動数に対応する共振振幅は増大する。
- (4) 地中に埋設されている柔構造物のたわみは、近似的には構造物の固有モードの応答を重みとしてあたかもモーダルアナリシスによる手法のように展開することができる。したがって、このとき剛構造物の場合のように、表層地盤の動特性が構造物の各モードに対応する剛性効果、逸散による減衰効果および地震力の効果として捕えることが可能である。
- (5) 剛性効果は1次モードに対するものが最も大きく、次数とともに急激に低下する。さらに地盤の不均質性が大なるほど、かつ地上部分が長いほどその剛性効果は低下するが、上載荷重の大小にはほとんど関係しない。
- (6) 逸散による減衰効果を換算した減衰定数は、不均質性が大きいほど小さく、上載荷重のある構造物の方がそのない構造物に比べて大きい。また概してこの換算減衰定数は上載荷重



が小さいほど、空中部分が長いほど大きい傾向にある。

- (7) 1次モードに対する地震力は2次以上のモードの地震力に比べて格段に大きく、高次の地震力は無視しうる。また、地盤の不均質性が大きいほど、上載荷重が軽いほど、かつ空中部分が短いほど、この地震力の効果は小さい。
- (8) 上載荷重のある基礎構造物のたわみは不均質性が大きく、上載荷重の大きいほど若干大きい、その差異は著しくはない。一方上端無拘束の空中部分を持った基礎構造物のたわみは地盤の不均質性が小さいほど、かつ空中部分が長いほど大きい。
- (9) 地中構造物の下端の曲げモーメントは、地盤の1次共振の影響が大きい、上載荷重のある場合は上端曲げモーメントは1次よりむしろ2次共振の影響が大きく、かつ不均質性が大きいほど曲げモーメントは大きい。

以上が本章において収めた成果の要約であるが、表層が不均質な地盤であっても、柔構造物のたわみがあたかもモーダルアナリシスの手法による結果に類似し、また周辺の地盤の動的効果をばね係数、換算減衰定数などに置換して考えることができたので、割合明確な解析結果がえられたのは1つの成果として評価に値しよう。上記の展開がさらに複雑な地盤系についても妥当かどうかについては今後の研究に待たねばならない。

以上の議論は表層地盤を半無限連続弾性体として取扱う場合のことであって、これを不連続な集中質量あるいは有限要素への分割による場合ならば地盤の不均質性を考慮することは容易であるが、<sup>4,5,6)</sup> 波動の無限遠への逸散の表現がいまだ未解決である。このような現状において本章の研究成果の有する意義は小さくないと考えられる。

## 第 5 章 多層地盤の振動と基礎構造物の 周波数応答

### 5.1 概 説

地盤はその地点での地質構造学上の歴史を経て形成されてきたものであろうが、その中でも地表面に近い地盤ほどその歴史が浅く、したがって構成は複雑多岐にわたっている。ところで、近年の築造物の大型化に伴って、当然その埋設基礎部はますます深く根入れされるようになり、周辺の支持地盤の物理特性の分布に相当大きな差があるために、工学的にももはや平均的な取扱いをなしにくく、このような場合は表層を多層地盤として取扱い、その解析がなされねばならないであろう。

最近では計測器および計測方法の発達に伴って、実地震動が数多く観測記録されているが、その地盤内鉛直方向の各点で記録された波形が金井らのいわゆる重複反射理論<sup>1)</sup>によってうまく説明される場合も報告されている。またこれらの波形の持つスペクトル特性についても多層地盤としての特異性がよく現われている例も多く示されてきた。<sup>2),3),4),5)</sup>このように多層地盤の振動理論と地震観測記録との対応がなされる場合もあるが、特にことわらない限り上記のことは地震波が鉛直下方より来襲し、上下方向のみの伝播しか考慮していないことには留意すべきであろう。したがって、この場合の波動論的取扱いは1次元の有界領域の問題であるから、多層地盤の構成が複雑であっても、これをばねとダッシュポットで置き換えた多質点系の応答解析もまた十分の精度を上げうるもので、両解法による比較もなされている例もある<sup>6)</sup>。

一方、前章までの解析において幾度も触れたように、埋設構造物は周辺地盤との連成系をなすので、構造物表面より放射波が生じ、この波動は地盤内を水平および鉛直方向に伝播する。ところで前章までと同様に、構造物下部を支持する基盤はきわめて堅く、表層(多層)地盤内での波動は基盤内には透過しないものとしても、この放射波はある cut off frequency より振動数が大きいとき、この多重表層地盤内を反射・屈折の法則に従って水平無限遠方に逸散する。この場合、水平方向の伝播速度が地盤構成とともに、入力振動数あるいは波長に依存することになり、いわゆる分散性の波動が生ずることになる。もちろん、非伝播性の場合すなわち減衰振動の場合も当然存在するわけであり、これらいずれの場合においても、その鋭直分布形が振動数に依存し、かつそれらの直交性を用いると、前章までと同様に固有関数展開による解析を行ないうるということが以下に示されている。解析は第3章と同様に剛あるいは柔な基礎構造物が多層地盤内へ根入されて基盤面にまで達している場合を対象とする。

## 5.2 多層地盤内における波動伝播

本章で取扱う多層地盤とは、各層内においては等方均質な物理特性を有するものであって、互にそのせん断弾性係数および密度したがって伝播速度を異にする任意の層厚の地盤が堅い基盤の上に密着して積重なっているものを指し、この基盤面より上の多層地盤全体を表層地盤と総称するものとする。この多層地盤系の振動解析上で、地盤内の変位は、水平面内の成分のみを考慮し、かつ基盤内への波動の透過を考えないことは前章までと同様であり、その他に次のような仮定を設定した。

- (1) 各層内における粘性減衰係数とせん断弾性係数との比は一定とし、
- (2) 各層の粘性減衰作用は放射波の波数に同一の効果を与えるものとする。

### 5.2.1 水平せん断振動の固有モードとその直交性

図 5.1 のように、基盤面より鉛直上方に地震波が入射するとき、第  $j$  層における地盤の運動方程式は以下のように書ける。

$$\rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \left( \mu_j + \mu_j' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} - \rho_j \frac{\partial^2 u_B}{\partial t^2}, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

…………… ( 5.1 )

ここに、 $\rho_j, \mu_j, \mu_j'$  はおのおの、下方よりの第  $j$  層における密度、せん断弾性係数および粘性減衰係数であり、添字  $j$  は第  $j$  層に対する所属を表わす記号である。さらに  $u_j, u_B$  は各々、第  $j$  層の地盤の相対水平変位および入射波の水平変位を表わす。

そこで式 ( 5.1 ) を解くのに、この振動系固有の関数を必要とするのは前章までと同様であるが、このとき層内を上下方向に伝播する波動に関しては、以下の境界条件を満たすことによって、その固有関数  $Z_m(z)$ 、(  $m = 1, 2, 3, \dots$  ) が得られる。

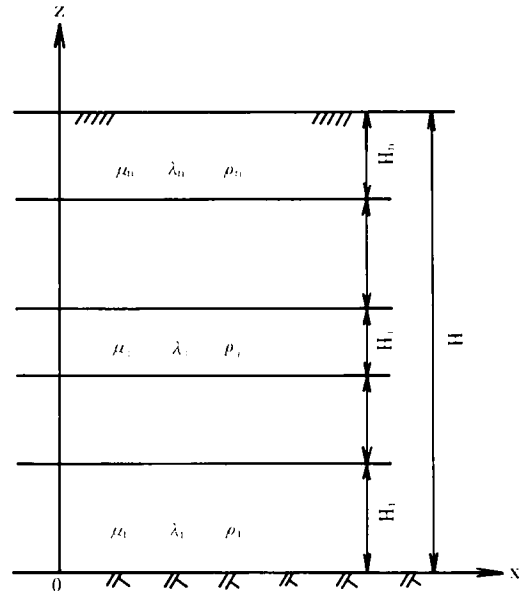


図 5.1 多層地盤のモデル

$$z = 0 : u_1 = 0$$

$$z = H_1 : u_1 = u_2, \left( \mu_1 + \mu_1' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_1}{\partial z} = \left( \mu_2 + \mu_2' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$z = H_1 + H_2 : u_2 = u_3, \left( \mu_2 + \mu_2' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_2}{\partial z} = \left( \mu_3 + \mu_3' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

.....

$$z = H_1 + \cdots + H_{n-1} : u_{n-1} = u_n, \left( \mu_{n-1} + \mu_{n-1}' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} = \left( \mu_n + \mu_n' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_n}{\partial z}$$

$$z = H_1 + \cdots + H_n : \left( \mu_n + \mu_n' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_n}{\partial z} = 0$$

..... ( 5.2 )

しかるに、各層の変位  $u_j$ , ( $j = 1, 2, \cdots, n$ ) は変数分離型の解を持つことは明らかであるので、仮定(1)により境界条件式 ( 5.2 ) の応力に関する釣合式は、以下のように簡略化される。

$$z = 0 : u_1 = 0$$

$$z = H_1 : u_1 = u_2, \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$z = H_1 + H_2 : u_2 = u_3, \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = \mu_3 \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

.....

$$z = H_1 + \cdots + H_n : u_{n-1} = u_n, \mu_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} = \mu_n \frac{\partial u_n}{\partial z}$$

$$z = H : \frac{\partial u_n}{\partial z} = 0$$

..... ( 5.2 )'

さて所期の固有関数  $Z_m(z)$  は、非減衰自由振動、すなわち式 ( 5.1 ) の  $\mu_j' = u_B = 0$  および、 $u_j(z; t)$  の時間項  $\exp(i\omega t)$  を省いたものであるから、

$$\frac{d^2 Z_m^{(j)}(z)}{dz^2} + \frac{\zeta_m^2}{V_j^2} Z_m^{(j)}(z) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

を満たす。したがって、その解である

$$Z_m^{(j)}(z) = A_j e^{i\alpha_m^{(j)} z} + B_j e^{-i\alpha_m^{(j)} z}, \quad (j = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

に、境界条件式 (5.2)' を適用すると、係数  $A_j, B_j, (j = 1, 2, \dots, n)$  に関する次の  $2n$  元  
 斉次連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 + B_1 &= 0 \\ A_1 e^{i\alpha_m^{(1)} H_1} + B_1 e^{-i\alpha_m^{(1)} H_1} &= A_2 e^{i\alpha_m^{(2)} H_1} + B_2 e^{-i\alpha_m^{(2)} H_1} \\ \mu_1 \alpha_m^{(1)} \{ A_1 e^{i\alpha_m^{(1)} H_1} - B_1 e^{-i\alpha_m^{(1)} H_1} \} &= \mu_2 \alpha_m^{(2)} \{ A_2 e^{i\alpha_m^{(2)} H_1} - B_2 e^{-i\alpha_m^{(2)} H_1} \} \\ A_2 e^{i\alpha_m^{(2)} (H_1+H_2)} + B_2 e^{-i\alpha_m^{(2)} (H_1+H_2)} &= A_3 e^{i\alpha_m^{(3)} (H_1+H_2)} + B_3 e^{-i\alpha_m^{(3)} (H_1+H_2)} \\ \mu_2 \alpha_m^{(2)} \{ A_2 e^{i\alpha_m^{(2)} (H_1+H_2)} - B_2 e^{-i\alpha_m^{(2)} (H_1+H_2)} \} &= \mu_3 \alpha_m^{(3)} \{ A_3 e^{i\alpha_m^{(3)} (H_1+H_2)} - B_3 e^{-i\alpha_m^{(3)} (H_1+H_2)} \} \\ \dots\dots\dots \\ A_{n-1} e^{i\alpha_m^{(n-1)} (H_1+\dots+H_{n-1})} + B_{n-1} e^{-i\alpha_m^{(n-1)} (H_1+\dots+H_{n-1})} &= A_n e^{i\alpha_m^{(n)} (H_1+\dots+H_{n-1})} \\ &\quad + B_n e^{-i\alpha_m^{(n)} (H_1+\dots+H_{n-1})} \\ \mu_{n-1} \alpha_m^{(n-1)} \{ A_{n-1} e^{i\alpha_m^{(n-1)} (H_1+\dots+H_{n-1})} - B_{n-1} e^{-i\alpha_m^{(n-1)} (H_1+\dots+H_{n-1})} \} \\ &= \mu_n \alpha_m^{(n)} \{ A_n e^{i\alpha_m^{(n)} (H_1+\dots+H_{n-1})} - B_n e^{-i\alpha_m^{(n)} (H_1+\dots+H_{n-1})} \} \\ A_n e^{i\alpha_m^{(n)} H} - B_n e^{-i\alpha_m^{(n)} H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

ただし、 $H = H_1 + H_2 + \dots + H_n$  : 表層全厚、 $\alpha_m^{(j)} = \zeta_m / V_j$  : 鉛直方向の波数、 $V_j = \sqrt{\mu_j / \rho_j}$  : 第  $j$  層の横波伝播速度

ここで、式 (5.5) における  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$  が有意な解を持つためには、これらの係数行列式が 0 であることが必要であり、これより  $2n$  元の要素より成る行列式表示が得られるが、それを若干整理した形で示すと次のようになる。

..... ( 5.6 )

ただし、行列式の空白部の要素はすべて0であって、次の置き換えがなされている。

..... ( 5.7 )

..... ( 5.8 )

そこで、行列式 (5.6) の各要素について整理を進めると、次の行列式になる。

— 156 —

$$\begin{vmatrix}
\ddots & & & & & \\
1 & 0 & -C_m^{(n-1)} & \cdots & iS_m^{(n-1)} & \\
0 & -1 & iR_{n-1, n-2} S_m^{(n-1)} & R_{n-1, n-2} C_m^{(n-1)} & & \\
& & 1 & 0 & -C_m^{(n)} & -iS_m^{(n)} \\
& & 0 & -1 & iR_{n, n-1} S_m^{(n)} & R_{n, n-1} C_m^{(n)} \\
& & & & 0 & -1
\end{vmatrix} = 0$$

………… ( 5.6 )'

ここに

$$S_m^{(j)} = \sin \alpha_m^{(j)} H_j, \quad C_m^{(j)} = \cos \alpha_m^{(j)} H_j, \quad \left( \begin{matrix} j = 1, 2, \cdots, n \\ m = 1, 2, \cdots \end{matrix} \right) \quad \text{………… ( 5.9 )}$$

そこで、行列式 ( 5.6 )' を

$$B_1 = \begin{vmatrix} iS_m^{(1)} \\ C_m^{(1)} \end{vmatrix}, \quad A_j = \begin{vmatrix} R_{j, j-1} C_m^{(j)} \\ iS_m^{(j)} \end{vmatrix}, \quad B_j = \begin{vmatrix} iR_{j, j-1} S_m^{(j)} \\ C_m^{(j)} \end{vmatrix}, \quad (j = 2, 3, \cdots, n)$$

………… ( 5.10 )

というような、一種の複素ベクトルとでも呼ぶべきもので整理し直すと、 $n$  層地盤の振動数方程式が、次式のような簡潔な行列積の形で表現しうることが分る。

$$B_1^T [A_2, B_2] [A_3, B_3] \cdots [A_{n-2}, B_{n-2}] [A_{n-1}, B_{n-1}] B_n = 0, \quad (n \geq 2)$$

………… ( 5.11 )

ここに  $B_1^T$  は  $B_1$  の転置ベクトル。

この式 ( 5.11 ) の振動数方程式においては、各層固有の複素行列  $[A_j, B_j]$ ,  $(j = 1, 2, \cdots, n)$  が、各層の状態を結合する伝達マトリックスのような役目を果していることが知られるが、この複素ベクトル  $A_j, B_j$  は式 ( 5.10 ) よりも分るように、実数と純虚数とで構成されているので、式 ( 5.11 ) の全体は実際は実数型の方程式であることが、容易に確かめられる。

ただし、式 ( 5.11 ) の振動数方程式は表層が単層のときは、特別に

$$\cos \alpha_m^{(1)} H_1 = 0, \quad (n = 1; m = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots (5.12)$$

としなければならないことは言うまでもない。

したがって表層地盤が例えば 1 層～3 層より成る場合については、式 (5.11) および式 (5.12) より次式の振動数方程式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} n = 1 : \cos q_m^{(1)} &= 0 \\ n = 2 : R_{21} \sin q_m^{(1)} \sin q_m^{(2)} - \cos q_m^{(1)} \cos q_m^{(2)} &= 0 \\ n = 3 : R_{21} \sin q_m^{(1)} \sin q_m^{(2)} \cos q_m^{(3)} + R_{32} \cos q_m^{(1)} \sin q_m^{(2)} \sin q_m^{(3)} \\ &+ R_{31} \sin q_m^{(1)} \cos q_m^{(2)} \sin q_m^{(3)} - \cos q_m^{(1)} \cos q_m^{(2)} \cos q_m^{(3)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.13)$$

ここに、

$$q_m^{(j)} = \alpha_m^{(j)} H_j = \frac{\zeta_m H_j}{V_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (5.14)$$

したがって、層数の増大とともに振動数方程式は飛躍的に繁雑になることが示されており、~~地~~盤より上に 1 層しかない場合 ( $n = 1$ ) が前章までの対象地盤に相当することが知られよう。そこで、式 (5.13) より得られる固有値  $\zeta_m$  に属する固有関数  $Z_m(z)$  は、式 (5.5) が不定形であるから、 $A_j, B_j, (j = 1, 2, \dots, n)$  はある単一の比例関係を持ち、これを式 (5.4) に持込むことにより、例えば  $n = 3$  (3 層地盤) の場合では、次式のようになる。

$$Z_m(z) = \left\{ \begin{aligned} Z_m^{(1)}(z) &= \frac{1}{S_m^{(1)}} [C_m^{(2)} C_m^{(3)} - R_{32} S_m^{(2)} S_m^{(3)}] \sin \alpha_m^{(1)} z \quad \text{または} \\ &= \frac{1}{C_m^{(1)}} [R_{21} S_m^{(2)} C_m^{(3)} + R_{31} C_m^{(2)} S_m^{(3)}] \sin \alpha_m^{(1)} z, \quad 0 \leq z \leq H_1 \\ Z_m^{(2)}(z) &= C_m^{(3)} \cos \alpha_m^{(2)} (H_1 + H_2 - z) - R_{32} S_m^{(3)} \sin \alpha_m^{(2)} (H_1 + H_2 - z), \quad H_1 \leq z \leq H_1 + H_2 \\ Z_m^{(3)}(z) &= \cos \alpha_m^{(3)} (H - z), \quad H_1 + H_2 \leq z \leq H \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (5.15)$$



ただし、

$$S_m^{(j)} = \sin q_m^{(j)}, \quad C_m^{(j)} = \cos q_m^{(j)}, \quad (j = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (5.16)$$

かくして、例え層が多くても固有値  $\zeta_m$  およびその固有関数  $Z_m(z)$  を理論的に誘導できることが分ったが、この固有関数  $Z_m(z)$  は重み関数を  $w(z)$  として、式 (5.3) より次の積分を考える

$$\begin{aligned} & \int_0^H w^{(z)} \frac{\mu(z)}{\rho(z)} \left[ Z_l \frac{d^2 Z_m}{dz^2} - Z_m \frac{d^2 Z_l}{dz^2} \right] dz \\ &= \int_0^{H_1} w_1 \frac{\mu_1}{\rho_1} \left[ Z_l^{(1)} \frac{d^2 Z_m^{(1)}}{dz^2} - Z_m^{(1)} \frac{d^2 Z_l^{(1)}}{dz^2} \right] dz + \int_{H_1}^{H_1+H_2} w_2 \frac{\mu_2}{\rho_2} \left[ Z_l^{(2)} \frac{d^2 Z_m^{(2)}}{dz^2} - Z_m^{(2)} \frac{d^2 Z_l^{(2)}}{dz^2} \right] dz + \dots \\ & \dots + \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H w_n \frac{\mu_n}{\rho_n} \left[ Z_l^{(n)} \frac{d^2 Z_m^{(n)}}{dz^2} - Z_m^{(n)} \frac{d^2 Z_l^{(n)}}{dz^2} \right] dz \\ &= (\zeta_l^2 - \zeta_m^2) \int_0^{H_1} w_1 Z_l^{(1)} Z_m^{(1)} dz + (\zeta_l^2 - \zeta_m^2) \int_{H_1}^{H_1+H_2} w_2 Z_l^{(2)} Z_m^{(2)} dz + \dots \\ & \dots + (\zeta_l^2 - \zeta_m^2) \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H w_n Z_l^{(n)} Z_m^{(n)} dz \end{aligned}$$

となるので、いま重み関数  $w(z)$  を

$$w(z) = \begin{cases} w_1 = \rho_1, & 0 \leq z \leq H_1 \\ w_2 = \rho_2, & H_1 \leq z \leq H_1 + H_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ w_n = \rho_n, & H_1 + \dots + H_{n-1} \leq z \leq H \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5.17)$$

とすると、上式は境界条件 (5.2)' を用いると、次式のように変形される。

$$\begin{aligned}
& (\zeta_l^2 - \zeta_m^2) \int_0^H w Z_l Z_m dz \\
& = (\zeta_l^2 - \zeta_m^2) \left[ \int_0^{H_1} \rho_1 Z_l^{(1)} Z_m^{(1)} dz + \int_{H_1}^{H_1+H_2} \rho_2 Z_l^{(2)} Z_m^{(2)} dz + \dots + \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H \rho_n Z_l^{(n)} Z_m^{(n)} dz \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_1 \left[ Z_l^{(1)} \frac{dZ_m^{(1)}}{dz} - Z_m^{(1)} \frac{dZ_l^{(1)}}{dz} \right]_0^{H_1} + \mu_2 \left[ Z_l^{(2)} \frac{dZ_m^{(2)}}{dz} - Z_m^{(2)} \frac{dZ_l^{(2)}}{dz} \right]_{H_1}^{H_1+H_2} + \dots \\
&\dots + \mu_n \left[ Z_l^{(n)} \frac{dZ_m^{(n)}}{dz} - Z_m^{(n)} \frac{dZ_l^{(n)}}{dz} \right]_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H
\end{aligned}$$

したがって、固有関数  $Z_l$  は次のように、 $\rho(z)$  を重みとした直交性を示すことが分る。

$$\int_0^H \rho(z) Z_l(z) Z_m(z) dz = \begin{cases} 0, & (l \neq m) \\ J_{ll}, & (l = m) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5.18)$$

ただし、

$$J_{ll} = \int_0^{H_1} \rho_1 \{Z_l^{(1)}\}^2 dz + \rho_2 \int_{H_1}^{H_1+H_2} \{Z_l^{(2)}\}^2 dz + \dots\dots + \rho_n \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H \{Z_l^{(n)}\}^2 dz \quad \dots (5.19)$$

## 5.2.2 地盤変位とパワースペクトル

固有関数  $Z_m(z)$  を用いて、式(5.1)を満たす地盤変位  $u(z; t)$  を展開すると、簡単な留数計算により次のように convolution (たたみ込み積分) の和として得られる。

$$u(z; t) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z) T_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z) \int_0^t w_m(t-\tau) \{-A_m \dot{u}_B(\tau)\} d\tau \quad \dots\dots\dots (5.20)$$

ただし、初期条件として  $u(z; 0) = \dot{u}(z, 0) = 0$  を使用しており、さらに仮定より  $\mu'_j/\mu_j = \mu'/\mu = 2h/\omega_0$  ( $h$ : 減衰定数,  $\omega_0$ : 基準円振動数) であって、 $w_m(\tau)$  は  $m$  次モードに対する地盤の単位衝撃応答関数であり、次式で与えられる。

$$w_m(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-h_m^2}} e^{-h_m \zeta_m \tau} \sin(\sqrt{1-h_m^2} \zeta_m \tau), & (h_m < 1, \tau \geq 0) \\ \text{または} \\ \frac{1}{\sqrt{h_m^2-1}} e^{-h_m \zeta_m \tau} \sinh(\sqrt{h_m^2-1} \zeta_m \tau), & (h_m > 1, \tau \geq 0) \\ 0, & (\tau < 0) \end{cases} \quad \dots (5.21)$$

および

$$A_m = \frac{\int_0^{H_1} \rho_1 Z_m^{(1)} dz + \int_{H_1}^{H_1+H_2} \rho_2 Z_m^{(2)} dz + \dots + \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H \rho_n Z_m^{(n)} dz}{\int_0^{H_1} \rho_1 \{Z_m^{(1)}\}^2 dz + \int_{H_1}^{H_1+H_2} \rho_2 \{Z_m^{(2)}\}^2 dz + \dots + \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H \rho_n \{Z_m^{(n)}\}^2 dz} = \frac{I_m}{J_{mm}} \quad \dots\dots\dots (5.22)$$

$$I_m = \rho_1 \int_0^{H_1} Z_m^{(1)} dz + \rho_2 \int_{H_1}^{H_1+H_2} Z_m^{(2)} dz + \dots + \rho_n \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H Z_m^{(n)} dz \quad \dots\dots\dots (5.23)$$

したがって、もし入力  $u_B(t)$  が  $u_B(t) = A_0 e^{i\omega t}$  なる調和振動であるときは、式 (5.20) より Fourier 変換の定義より容易に次式をうる。

$$u(z; t) = A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\xi_m^2} \omega^2 Z_m(z) \quad \dots\dots\dots (5.24)$$

ただし、

$$\xi_m^2 = (1 + 2 i h \omega / \omega_0) \zeta_m^2 - \omega^2 \quad \dots\dots\dots (5.25)$$

さて実地盤で観測された地震波形は時間的に強弱の盛衰があるために厳密な定常過程とは考えにくい、その主要動の比較的定常的であると見られるある部分を取り出して、これのパワースペクトルをフーリエスペクトルとして観察すると、地盤のある層によっては地震動の増幅作用の強弱や周波数成分の含まれ方が異なるといった、構造物への入力を考える上でも重要な特徴が見出されることがよくある。<sup>7), 8), 9)</sup> そこでここでは入力のパワースペクトル  $S_{\ddot{u}_B}(z; \omega)$  が周波数に対して平坦であるような定常過程として、表層地盤の任意点  $z$  における定常応答の変位および速度のパワースペクトル  $S_u(z; \omega)$ ,  $S_{\dot{u}}(z; \omega)$  はそれぞれ容易に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} S_u(z; \omega) &= |W(z; i\omega)|^2 S_{\ddot{u}_B}(z; \omega) \\ S_{\dot{u}}(z; \omega) &= \omega^2 |W(z; i\omega)|^2 S_{\ddot{u}_B}(z; \omega) = \omega^2 S_u(z; \omega) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.26)$$

ここに、 $W(z; i\omega)$  は周波数応答関数であって、式 (5.24) より

$$W(z; i\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^2} \frac{\int_0^H \rho Z_m dz}{\int_0^H \rho \{Z_m\}^2 dz} \cdot Z_m(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\xi_m^2} \cdot Z_m(z) \quad \dots\dots\dots (5.27)$$

で与えられるものである。すなわち、 $A_m/\xi_m^2$  を係数として固有関数  $Z_m(z)$  で展開されることが分るが、式中の  $A_m$ 、 $\xi_m^2$  はそれぞれ式 (5.22) および式 (5.25) で与えられ、表層が3層であるときは、固有関数  $Z_m(z)$  としては式 (5.15) を用いることは言うまでもない。したがって式 (5.27) より

$$\begin{aligned} |W(z; i\omega)|^2 &= W(z; i\omega) \cdot W(z; -i\omega) \\ &= \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m(\xi_m^2 - \omega^2)}{(\xi_m^2 - \omega^2)^2 + (\omega\mu'/\mu \cdot \xi_m^2)^2} Z_m(z) \right]^2 + \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m \cdot \omega\mu'/\mu \cdot \xi_m^2}{(\xi_m^2 - \omega^2)^2 + (\omega\mu'/\mu \cdot \xi_m^2)^2} Z_m(z) \right]^2 \\ &\dots\dots\dots (5.28) \end{aligned}$$

ところで、式 (5.27) を参照すると周波数応答関数  $W(z; i\omega)$  の分母の  $\xi_m^2$  の構成 (式 (5.25)) よりも分るように、周波数  $\omega$  の大なる領域では  $\mu'$  を含む粘性減衰項が大きく効いてくるため、 $|W(z; i\omega)|^2$  の高次の共振振幅は急速に小さくなるので、入力のパワー  $S_{\dot{u}_B}(z; \omega)$  としては、1次共振点付近での分布が急変しなければ、周波数領域全般にわたって平坦であるという仮定は必要でないと言えよう。したがって上記のことから、地盤内に一定の粘性減衰作用が存在する限り、地盤の振動のパワースペクトルの分布は地盤の動特性、特にその1次モードの特性がよく反映してくることが知れよう。また式 (5.26) の変位および速度のパワースペクトル曲線が周波数軸と囲む面積が、それぞれの分散値を与えることはいうまでもない。

### 5.2.3 放射波の固有モードとその直交性

概説でも述べたように、埋設構造物は周辺地盤よりせん断強制振動を受けるとともに、構造物は地盤に対して影響を及ぼす連成系を構成しているので、このとき構造物表面より地盤内へ波動が伝達されることになる。もちろん外力の円振動数  $\omega$  がある周波数以下ならば、地盤内での波動の伝播が生じなくて、減衰振動とならしめる cut off frequency  $\omega_{cr}$  が存在するが、内部減衰を考慮しないならば、両現象は互に伝播の波数を実数であるか純虚数であるかの違いであるから、両現象を引くくめて一般的に論ずることができる。

そこで、図 5.1 においてせん断波 (SH 波: S 波の水平成分) が鉛直方向 ( $z$  軸方向) および水平方向 ( $x$  軸方向) に伝播する場合を考えると、粘性減衰の存在しない第  $j$  層における水平変位  $u_j(z; t)$  は

$$\frac{1}{V_j^2} \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (5.29)$$

を満たすことは明らかである。

ところで構造物表面よりの放射波は水平方向無限遠方に逸散するので、この条件を考慮して鉛直および水平方向の伝播波数をそれぞれ  $\beta^{(j)}$  および  $\kappa$  (境界面では連続であるので各層で共通) とすると、式 (5.29) の解は

$$u_j(z; t) = [A'_j e^{i\beta^{(j)}z} + B'_j e^{-i\beta^{(j)}z}] e^{i(\omega t - \kappa x)}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots (5.30)$$

で与えられるので、外力の振動数  $\omega$  と波数  $\kappa$ ,  $\beta^{(j)}$  との間には

$$\kappa^2 + \beta^{(j)2} = \frac{\omega^2}{V_j^2}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots (5.31)$$

の関係が成立する。ところで、波数  $\beta^{(j)}$  には上下両方向の伝播波が考えられるので、正負の実数あるいは正負の純虚数のいずれかの場合になるが、一方水平伝播波数  $\kappa$  は正の実数のときは無限遠に逸散する波動を、負の純虚数の場合には距離とともに減衰する振動様式を与えることが分る。

このとき、式 (5.30) の解の形よりも分るように、放射波もまた鉛直方向においては、入射波の場合に成立した式 (5.11) の振動数方程式に類する以下のような関係式が存在することになる。

$$B_1'^T [A'_2, B'_2] [A'_3, B'_3] \dots\dots [A'_{n-2}, B'_{n-2}] [A'_{n-1}, B'_{n-1}] B'_n = 0, \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots (5.32)$$

ただし、この場合は各要素は次の内容を持っている。

$$B'_1 = \begin{vmatrix} iS_m^{(1)} \\ C_m^{(1)} \end{vmatrix}, \quad A'_j = \begin{vmatrix} R'_{j,j-1} C_m^{(j)} \\ iS_m^{(j)} \end{vmatrix}, \quad B'_j = \begin{vmatrix} iR'_{j,j-1} S_m^{(j)} \\ C_m^{(j)} \end{vmatrix}, \quad (j = 2, 3, \dots, n) \quad \dots\dots (5.33)$$

$$q_m^{(j)} = \beta_m^{(j)} H_j = H_j \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_j}\right)^2 - \kappa_m^2} \quad \dots\dots (5.34)$$

$$R'_{ij} = \frac{\mu_i \beta_m^{(j)}}{\mu_j \beta_m^{(j)}} = \frac{\rho_i}{\rho_j} \frac{H_i}{H_j} \left(\frac{V_i}{V_j}\right)^2 \frac{q_m^{(i)}}{q_m^{(j)}}, \quad (i > j) \quad \dots\dots (5.35)$$

$$C_m^{(j)} = \cos q_m^{(j)}, \quad S_m^{(j)} = \sin q_m^{(j)}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (5.36)$$

したがって、式(5.13)のように3層地盤における放射波に関する固有方程式は

$$R'_{21} \sin q_m^{(1)} \sin q_m^{(2)} \cos q_m^{(3)} + R'_{32} \cos q_m^{(1)} \sin q_m^{(2)} \sin q_m^{(3)} + R'_{31} \sin q_m^{(1)} \cos q_m^{(2)} \sin q_m^{(3)} \\ - \cos q_m^{(1)} \cos q_m^{(2)} \cos q_m^{(3)} = 0, \quad (n = 3) \quad \dots\dots\dots (5.37)$$

で与えられる。

このように式(5.34)より、水平方向の伝播波数  $\kappa_m$  は円振動数  $\omega$  に依存することが分るが、もしある一定の  $\omega$  に対して式(5.32)より  $\kappa_m$  が実数として得られるならば、その  $\kappa_m$  の有限個の数だけの分散性の波動が無限遠に逸散することを意味する。このとき分散性の波数  $\kappa_m$  が  $m$  個存在するとすれば、その  $\kappa_m$  の大なる方より1次モード、2次モード、……、 $m$  次モードに対応し、一方式(5.32)を満たす負の純虚数  $\kappa_m$  は無限個存在し、これらの固有値  $\kappa_m$  の絶対値の小なるものより順に  $(m+1)$  次モード、 $(m+2)$  次モード、……が対応する。もちろん、円振動数  $\omega$  がある小さな値のときは、先述のように cut off frequency  $\omega_{cr}$  が存在するので、外力の円振動数  $\omega$  が、 $\omega < \omega_{cr}$  の領域では分散性の波動は全く生ずることなく、式(5.32)を満たす  $\kappa_m$  はすべて負の純虚数として求められ、その  $\kappa_m$  の絶対値の小なる方より順に、1次モード、2次モード、……が対応することは言うまでもない。さらに cut off frequency  $\omega_{cr}$  は水平伝播波数  $\kappa_m$  が0となる場合の円振動数  $\omega$  のことであるから、式(5.32)および式(5.34)よりも分るように、この場合は水平方向に無限大の速さで  $SH$  波が伝播すること、すなわち成層地盤全体が同位相のせん断振動をしていることを意味し、したがって、このとき式(5.32)は式(5.11)と同等の意味を持つことを示しており、 $\omega_{cr}$  が成層地盤の固有振動数にほかならない。

ところで、この分散性の波動に関してはきわめて多くの研究がなされてきているが<sup>10)</sup>、地中に埋設された構造物の振動性状の解明という工学的問題に対しては、上記の分散性波動の有限個の持つモードだけでは、理論的には無限個の固有関数を必要とする固有関数展開法によって不十分であり、本研究のように減衰振動モード( $\kappa_m$ が純虚数)をも合わせて求めておく必要がある。このように水平方向の伝播を考慮したときの、分散・非分散性の如何にかかわらず、そのモードは円振動数  $\omega$  に依存するので、例えば3層地盤においては、式(5.13)の第3式において、 $R_{ij} \rightarrow R'_{ij}$ ,  $\alpha_m^{(j)} \rightarrow \beta_m^{(j)}$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $m = 1, 2, \dots$ )としたものにほかならないので、 $m$  次のモード関数を  $Z'_m(z; \omega)$  とすれば次式のように記述できる。

$$Z_m'(z; \omega) = \begin{cases} Z_m^{(1)'}(z; \omega) = \frac{1}{S_m^{(1)'}} [C_m^{(2)'} C_m^{(3)'} - R_{32}' S_m^{(2)'} S_m^{(3)'}] \sin \beta_m^{(1)} z \text{ または} \\ \quad = \frac{1}{C_m^{(1)'}} [R_{21}' S_m^{(2)'} C_m^{(3)'} + R_{31}' C_m^{(2)'} S_m^{(3)'}] \sin \beta_m^{(1)} z, \quad 0 \leq z \leq H_1 \\ Z_m^{(2)'}(z; \omega) = C_m^{(3)'} \cos \beta_m^{(2)} (H_1 + H_2 - z) - R_{32}' S_m^{(3)'} \sin \beta_m^{(2)} (H_1 + H_2 - z), \\ \quad H_1 \leq z \leq H_1 + H_2 \\ Z_m^{(3)'}(z; \omega) = \cos \beta_m^{(3)} (H - z), \quad H_1 + H_2 \leq z \leq H \end{cases}$$

………… ( 5.38 )

ただし,

$$S_m^{(j)'} = \sin q_m^{(j)'} = \sin(\beta_m^{(j)} H_j), \quad C_m^{(j)'} = \cos q_m^{(j)'} = \cos(\beta_m^{(j)} H_j)$$

ところで  $m$  次モードの分散性波動の位相速度を  $c_m$  とすると, これに対応する群速度  $U_m$  も存在し, 式 ( 5.32 ) あるいは式 ( 5.37 ) のような固有方程式より得られる  $\kappa_m$  とは

$$c_m = \frac{\omega}{\kappa_m}, \quad U_m = \frac{d\omega}{d\kappa_m} \quad \text{………… ( 5.39 )}$$

なる関係式で結ばれている。これは地震動のように種々の周波数 ( または波長 ) を持った波の集まりと考えられるものが水平方向に伝播する場合, 位相速度が周波数に依存するために一定の間隔で波の疎密すなわち群が生ずることを意味しており, 通常は  $c_m > U_m$  であり, 振動数  $\omega$  が大なるにつれて, 両速度は互に一定速度に漸近する。したがって, 一定の  $\omega$  に対する分散性の波数  $\kappa_m$  が存在すれば, 位相速度  $c_m$  はただちにその対応する個数だけ存在することになるが, 一方の群速度  $U_m$  を求めるには, 式 ( 5.39 ) の第 2 式のように  $\kappa_m$  での微分を伴うので, 一般的にこれを求めるのはそれほど容易ではない。

しかしながら, 表層が 1 層のみの場合は, 式 ( 5.32 ) の特別な場合 (  $n = 1$  ) に相当し, これは先述の式 ( 5.12 ) が成立するのと同様に考えればよいので, 水平伝播波数  $\kappa_m$  は

$$\cos q_m^{(1)'} = \cos \left( H_1 \sqrt{\left( \frac{\omega}{V_1} \right)^2 - \kappa_m^2} \right) = 0, \quad ( m = 1, 2, \dots ) \quad \text{………… ( 5.40 )}$$

を解けばよく、容易に次の解が得られる。

$$\kappa_m = \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_1}\right)^2 - \left\{\frac{\pi(2m-1)}{2H_1}\right\}^2}, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (5.41)$$

したがって、式(5.39)の定義により、 $c_m$ 、 $U_m$ を求めると、次式のように互に逆数関係になる。

$$\left. \begin{aligned} c_m &= \frac{\omega}{\kappa_m} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{V_1}\right)^2 - \left\{\frac{\pi(2m-1)}{2H_1}\right\}^2}} \\ U_m &= \frac{V_1^2}{c_m} = \frac{V_1^2}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_1}\right)^2 - \left\{\frac{\pi(2m-1)}{2H_1}\right\}^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.42)$$

( $m = 1, 2, \dots$ )

いうまでもなく、この表層が1層だけの解は第2章におけるそれと同一のものであり、 $\kappa_m$ の式に含まれる $\pi(2m-1)/2H_1$ 、( $m = 1, 2, \dots$ )は表層地盤の水平せん断第 $m$ 次固有円振動数 $\zeta_m$ に他ならない。そこで、式(5.42)のように得られた位相速度 $c_m$ 、群速度 $U_m$ を図示したのが、図5.2であるが、これよりcut off frequency  $\omega_{cr}$ より振動数が大なるにつれて、高次モードの分散性波動が水平方向に伝播しうることを示している。また外力の円振動数 $\omega$ が大(波長小)なるほど $c_m$ は単調に減少していき、表層のせん断波の伝播速度 $V_1$ に漸近するが、一方の群速度 $U_m$ は $\omega$ が大なるにつれて単調に増加していき、同様にせん断波の波速 $V_1$ に漸近することが分る。

このように、表層が1層のみより成るときは、これら波速の間に $c_m > V_1 > U_m$ の関係が成立しているが、多層地盤になると伝播波の反射・屈折が各層で複雑になり、上記のような大小関係は必ずしも成立しないことがある。これらのことについては後述の数値計算例において示されるが、表層が3層地盤の場合の群速度を求めるには、式(5.34)、(5.35)、(5.36)および(5.37)を $\kappa_m$ で微分して、式(5.39)の定義式を用いれば下記のように得られる。



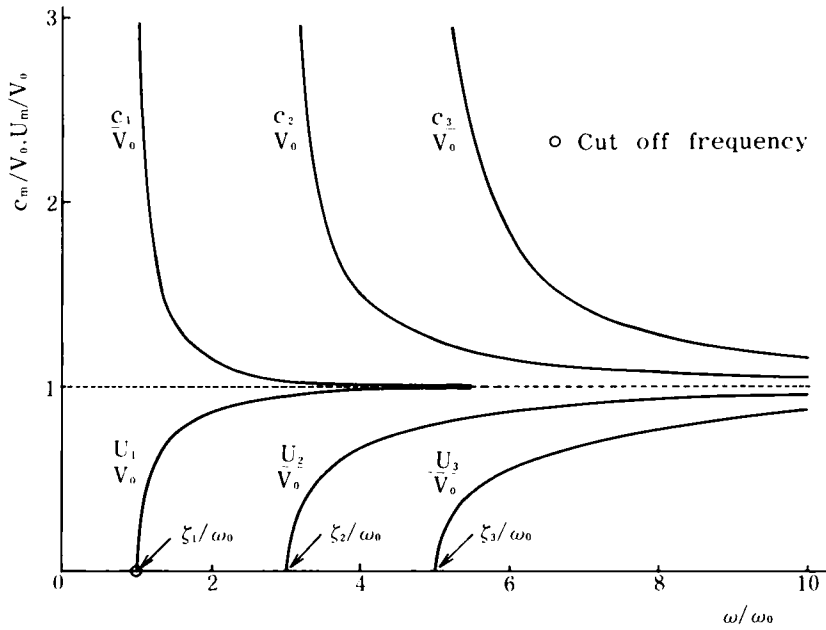


図 5.2 位相速度と群速度の分散性 (1 層地盤)

$$\begin{aligned}
 U_m = & \frac{V_0^2}{c_m} \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^2 \frac{H_1}{H_2} \frac{q_m^{(2)}}{q_m^{(1)}} \left\{ \left( \frac{H_2}{H} \right) \frac{1}{(q_m^{(2)})^2} - \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(1)})^2} \right\} S_m^{(1)} S_m^{(2)} C_m^{(3)} + \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} S_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} \right. \\
 & + \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} C_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} - \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} S_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(3)}} \left. \right\} + \left( \frac{V_3}{V_2} \right)^2 \frac{H_2}{H_3} \frac{q_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} \left\{ \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(3)})^2} \right. \\
 & - \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(2)})^2} \left. \right\} C_m^{(1)} S_m^{(2)} S_m^{(3)} - \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} S_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} + \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} C_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} \\
 & + \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} S_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(3)}} \left. \right\} + \left( \frac{V_3}{V_1} \right)^2 \frac{H_1}{H_3} \frac{q_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} \left\{ \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(3)})^2} - \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(1)})^2} \right\} S_m^{(1)} C_m^{(2)} S_m^{(3)} \\
 & + \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} C_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} - \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} S_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} + \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} C_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(3)}} \left. \right\} + \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} C_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} \\
 & + \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} S_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} + \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} C_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(3)}} \left. \right] \\
 & / \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^2 \frac{H_1}{H_2} \frac{q_m^{(2)}}{q_m^{(1)}} \left\{ \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^2 \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(2)})^2} - \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^2 \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(1)})^2} \right\} S_m^{(1)} S_m^{(2)} C_m^{(3)} \right. \\
 & + \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^2 \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} S_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} + \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^2 \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} C_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} - \left( \frac{V_0}{V_3} \right)^2 \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} S_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(3)}} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{V_3}{V_2} \right)^2 \frac{H_2}{H_3} \frac{q_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} \left\{ \left( \left( \frac{V_0}{V_3} \right)^2 \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(3)})^2} - \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^2 \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(2)})^2} \right) C_m^{(1)} S_m^{(2)} S_m^{(3)} \right. \\
& - \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^2 \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} S_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} + \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^2 \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} C_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} + \left. \left( \frac{V_0}{V_3} \right)^2 \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} S_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(3)}} \right\} \\
& + \left( \frac{V_3}{V_1} \right)^2 \frac{H_1}{H_3} \frac{q_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} \left\{ \left( \left( \frac{V_0}{V_3} \right)^2 \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(3)})^2} - \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^2 \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{1}{(q_m^{(1)})^2} \right) S_m^{(1)} C_m^{(2)} S_m^{(3)} \right. \\
& + \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^2 \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} C_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} - \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^2 \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} S_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} + \left. \left( \frac{V_0}{V_3} \right)^2 \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} C_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(3)}} \right\} \\
& + \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^2 \left( \frac{H_1}{H} \right)^2 \frac{S_m^{(1)} C_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(1)}} + \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^2 \left( \frac{H_2}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} S_m^{(2)} C_m^{(3)}}{q_m^{(2)}} + \left. \left( \frac{V_0}{V_3} \right)^2 \left( \frac{H_3}{H} \right)^2 \frac{C_m^{(1)} C_m^{(2)} S_m^{(3)}}{q_m^{(3)}} \right\} \\
& \dots\dots\dots (5.43)
\end{aligned}$$

さて、上記のように一定円振動数  $\omega$  に対する  $\kappa_m$  が求まれば、これに対する固有モード  $Z_m'(z; \omega)$  が求められることが分ったが、このとき放射波の持つ固有モード  $Z_m'(z; \omega)$  の直交性については以下のように示される。すなわち  $Z_m'(z; \omega)$  は

$$\frac{d^2 Z_m^{(j)}(z; \omega)}{dz^2} + \{\beta_m^{(j)}\}^2 Z_m^{(j)}(z; \omega) = 0, \quad \left( \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, n \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad \dots\dots\dots (5.44)$$

を満足するので、上式および式 (5.31) より

$$Z_l^{(j)} \frac{d^2 Z_m^{(j)}}{dz^2} - Z_m^{(j)} \frac{d^2 Z_l^{(j)}}{dz^2} = \{(\beta_l^{(j)})^2 - (\beta_m^{(j)})^2\} Z_l^{(j)} Z_m^{(j)} = (\kappa_m^2 - \kappa_l^2) Z_l^{(j)} Z_m^{(j)}$$

が得られる。そこで上式の両辺に重み関数  $w'(z)$  を乗じて、 $z$  に関する積分を行なえば次の関係式をうる。

$$\begin{aligned}
& (\kappa_m^2 - \kappa_l^2) \int_0^H w'(z) Z_l'(z; \omega) Z_m'(z; \omega) dz \\
& = (\kappa_m^2 - \kappa_l^2)^2 \left[ \int_0^{H_1} w'_1 Z_l^{(1)} Z_m^{(1)} dz + \int_{H_1}^{H_1+H_2} w'_2 Z_l^{(2)} Z_m^{(2)} dz + \dots\dots\dots + \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H w' Z_l^{(n)} Z_m^{(n)} dz \right] \\
& = w'_1 \left[ Z_l^{(1)} \frac{dZ_m^{(1)}}{dz} - Z_m^{(1)} \frac{dZ_l^{(1)}}{dz} \right]_{H_1} + w'_2 \left[ Z_l^{(2)} \frac{dZ_m^{(2)}}{dz} - Z_m^{(2)} \frac{dZ_l^{(2)}}{dz} \right]_{H_1+H_2} + \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$\dots\dots + w'_n \left[ Z_l^{(n)} \frac{dZ_m^{(n)}}{dz} - Z_m^{(n)} \frac{dZ_l^{(n)}}{dz} \right]_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H \quad \dots\dots (5.45)$$

となるので、重み関数  $w'(z)$  として

$$w'(z) = \begin{cases} w'_1(z) = \mu_1, & 0 \leq z \leq H_1 \\ w'_2(z) = \mu_2, & H_1 \leq z \leq H_1 + H_2 \\ \dots\dots\dots \\ w'_n(z) = \mu_n, & H_1 + \dots + H_{n-1} \leq z \leq H \end{cases} \quad \dots\dots (5.46)$$

とおけば、境界条件式 (5.2)' を適用すると、式 (5.18) で示したと同様にこの固有関数  $Z_m'(z; \omega)$  にも重み  $w'(z)$  を介して直交性があることが知られる。

さてここで対象としている地中構造物は円柱であるので、これより放射される波動は円筒座標で表わしておいた方が都合がよい。そこで図 5.3 のように第  $j$  層の地盤の動径・接線両方向の変位をおのおの、 $u_j(z; t)$ ,  $v_j(z; t)$  とすると、これらの満たすべき関係式は、先述の式 (5.29) の波動方程式において粘性減衰を考慮して円筒座標で書き表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} &= (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial A}{\partial r} - 2\mu_j \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{r \partial \theta} + 2 \left( \mu_j + \mu'_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \tilde{\omega}_\theta}{\partial z} \\ \rho_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} &= (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial A}{r \partial \theta} - 2 \left( \mu_j + \mu'_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \tilde{\omega}_r}{\partial z} + 2\mu_j \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (5.47)$$

そこで前章の式 (4.27) のように、第  $j$  層の変位の potential  $\phi_0^{(j)}$ ,  $\phi_0^{(j)}$  を定義するものとして、先に求めた放射波の持つ固有関数  $Z_m'(z; \omega)$  を用いて展開すると、次式のように縦波と横波に関する 2 つの方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_0^{(j)} - h_m^2 \phi_0^{(j)} &= 0 \\ \nabla^2 \phi_0^{(j)} - k_m^2 \phi_0^{(j)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (5.48)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ k_m^2 &= \frac{\mu_j \{ \beta_m^{(j)} \}^2 + i \omega \mu_j' \{ \beta_m^{(j)} \}^2 - \rho_j \omega^2}{\lambda_j + 2 \mu_j} = \frac{\mu_j}{\lambda_j + 2 \mu_j} k_m^2 = \left( \frac{V_j}{V_j'} \right)^2 k_m^2 \\ k_m^2 &= \frac{\mu_j \{ \beta_m^{(j)} \}^2 + i \omega \mu_j' \{ \beta_m^{(j)} \}^2 - \rho_j \omega^2}{\mu_j} = -\kappa_m^2 + i \omega \frac{\mu'}{\mu} \zeta_m^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.49)$$

ただし、 $\tilde{V}_j = \sqrt{(\lambda_j + 2\mu_j)/\rho_j}$ 、 $V_j = \sqrt{\mu_j/\rho_j}$  はおのおの第  $j$  層の縦波および横波の伝播速度である。また上記の式 (5.49) における  $k_m^2$  の前半の式よりも分るように、内部減衰項が各層に存在するときは、非減衰の振動より得られるモード  $Z_m'(z; \omega)$  を用いて展開する限りは、式 (5.48)、(5.49) における  $k_m^2$  は各層によって異なった値をとることになり、厳密な意味ではこの  $k_m^2$  の定義は妥当ではないが、ここでは簡単のため 5.2 の当初に記した仮定(2)を用いて、内部減衰効果  $i\omega\mu_j'/\mu_j \cdot \{ \beta_m^{(j)} \}^2$  のうち  $\{ \beta_m^{(j)} \}^2$  のかわりに、式 (5.25) の  $\xi_m$  の場合のように、 $\zeta_m^2$  ( $\zeta_m$ : 表層地盤の  $m$  次固有円振動数) で置き換えたのが、式 (5.49) の  $k_m^2$  の後半の式である。このような内部減衰の近似的な取扱いは、前章までに見てきたように、これが逸散減衰効果に比べてかなり小さいことから、それほどの不都合は生じないであろうと推察される。

かくして、式 (5.47) は次のような解を持つ。

$$\left. \begin{aligned} u_j(r, \theta, z; t) &= \sum_{m, n=1}^{\infty} \left[ A_{mn}' \frac{\partial K_n(h_m r)}{\partial r} + n B_{mn}' \frac{K_n(k_m r)}{r} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{array} \right\} Z_m'(z; \omega) e^{i\omega t} \\ v_j(r, \theta, z; t) &= \sum_{m, n=1}^{\infty} \left[ n A_{mn}' \frac{K_n(h_m r)}{r} + B_{mn}' \frac{\partial K_n(k_m r)}{\partial r} \right] \left\{ \begin{array}{c} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{array} \right\} Z_m'(z; \omega) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.50)$$

したがって、表層地盤と地中構造物の相互作用の結果生ずる地盤内の変位は、先に求めた式 (5.24) と式 (5.50) との和で表わされることは明らかである。そこでこの動径および接線方向の変位をそれぞれ  $U_r(r, \theta, z; t)$ 、 $V_\theta(r, \theta, z; t)$  と表わすと次の結果がえられる。

$$\left. \begin{aligned} U_r(r, \theta, z; t) &= A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\omega^2}{\xi_m^2} Z_m(z) \cos \theta \\ &+ \sum_{m, n=1}^{\infty} \left[ A_{mn}' \frac{\partial K_n(h_m r)}{\partial r} + n B_{mn}' \frac{K_n(k_m r)}{r} \right] \cos n\theta \cdot Z_m'(z; \omega) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 V_{\theta} (r, \theta, z; t) = -A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\omega^2}{\xi_m^2} Z_m(z) \sin \theta \\
 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n A'_{mn} \frac{K_n(h_m r)}{r} + B'_{mn} \frac{\partial K_n(k_m r)}{\partial r} \right] \sin n\theta \cdot Z'_m(z; \omega) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (5.51)$$

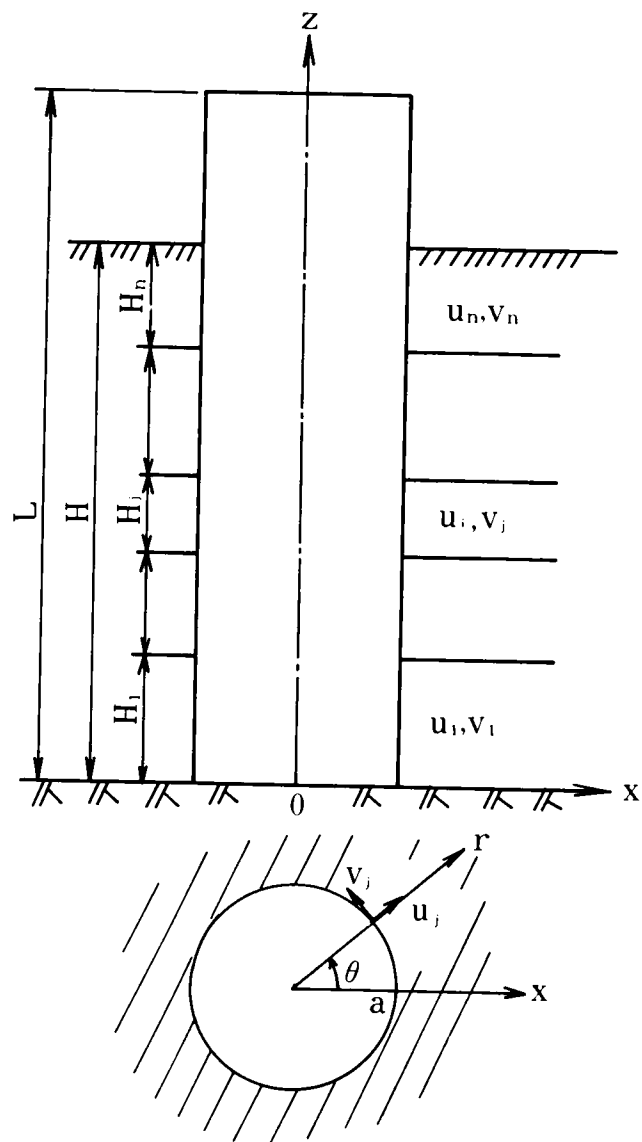


図 5.3 地盤と構造物のモデル

ここで、図 5.3 を参照して、円断面基礎構造物の  $x$  軸方向の水平変位  $\eta(z; t)$  は  $\eta(z; t) = \eta_0(z) e^{i\omega t}$  と考えると、構造物表面 ( $r=a$ ) においては、構造物と地盤の変位が連続という条件より、次式のように積分定数  $A_{m1}$ ,  $B_{m1}$  (断面形保持より  $n=1$  は明らか) が求まる。

$$\left. \begin{aligned} A_{m1} &= \frac{\frac{1}{J'_{mm}(\omega)} \sum_{l=1}^{\infty} I'_{lm}(\omega) \left\{ D_l - \frac{\omega^2}{\xi_l^2} \frac{I_l}{J_{ll}} A_0 \right\} \left\{ \frac{\partial K_1(k_m a)}{\partial a} - \frac{K_1(k_m a)}{a} \right\}}{\frac{\partial K_1(h_m a)}{\partial a} \frac{\partial K_1(k_m a)}{\partial a} - \frac{K_1(h_m a)}{a} \frac{K_1(k_m a)}{a}} \\ B_{m1} &= \frac{\frac{1}{J'_{mm}(\omega)} \sum_{l=1}^{\infty} I'_{lm}(\omega) \left\{ D_l - \frac{\omega^2}{\xi_l^2} \frac{I_l}{J_{ll}} A_0 \right\} \left\{ \frac{\partial K_1(h_m a)}{\partial a} - \frac{K_1(h_m a)}{a} \right\}}{\frac{\partial K_1(h_m a)}{\partial a} \frac{\partial K_1(k_m a)}{\partial a} - \frac{K_1(h_m a)}{a} \frac{K_1(k_m a)}{a}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5.52)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} D_l &= \frac{\int_0^H \eta_0(z) \rho(z) Z_l(z) dz}{\int_0^H \rho(z) \{Z_l(z)\}^2 dz} = \frac{1}{J_{ll}} \left[ \rho_1 \int_0^{H_1} \eta_0^{(1)} Z_l^{(1)} dz + \rho_2 \int_{H_1}^{H_1+H_2} \eta_0^{(2)} Z_l^{(2)} dz + \dots\dots \right. \\ &\quad \left. \dots\dots + \rho_n \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H \eta_0^{(n)} Z_l^{(n)} dz \right] \\ J'_{mm}(\omega) &= \int_0^H \mu(z) \{Z'_m(z; \omega)\}^2 dz = \mu_1 \int_0^{H_1} \{Z'^{(1)}_m\}^2 dz + \mu_2 \int_{H_1}^{H_1+H_2} \{Z'^{(2)}_m\}^2 dz + \dots\dots \\ &\quad \dots\dots + \mu_n \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H \{Z'^{(n)}_m\}^2 dz \\ I'_{lm}(\omega) &= \int_0^H Z_l(z) \cdot \mu(z) Z'_m(z; \omega) dz = \mu_1 \int_0^{H_1} Z_l^{(1)} Z'^{(1)}_m dz + \mu_2 \int_{H_1}^{H_1+H_2} Z_l^{(2)} Z'^{(2)}_m dz + \dots\dots \\ &\quad \dots\dots + \mu_n \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H Z_l^{(n)} Z'^{(n)}_m dz \end{aligned} \right\} \dots\dots (5.53)$$

したがって、円断面地中構造物の単位長当りに作用する振動圧  $P_j(z; t)$  は前章と同様にし  
て、次式のように書き表わされる。

$$\begin{aligned}
 P_j(z; t) &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[ \sigma_r \cdot \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta \right]_{r=a} a d\theta \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \pi a \left[ A_{m1} (\lambda_j + 2\mu_j) h_m^2 K_1(h_m a) + B_{m1} \mu_j k_m^2 K_1(k_m a) \right] Z_m^{(j)}(z; \omega) e^{i\omega t} \\
 &= \pi a \sum_{m=1}^{\infty} \mu_j k_m^2 \left[ A_{m1} K_1(h_m a) + B_{m1} K_1(k_m a) \right] Z_m^{(j)}(z; \omega) e^{i\omega t} \\
 &= -\pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_j k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ D_l - \frac{\omega^2}{\xi_l^2} \frac{I_l}{J_{ll}} A_0 \right\} I_{lm}'(\omega) Z_m^{(j)}(z; \omega) e^{i\omega t}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 &\dots\dots\dots (5.54)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 Q_m &= \frac{\frac{K_0(h_m a)}{K_1(h_m a)/h_m a} + \frac{K_0(k_m a)}{K_1(k_m a)/k_m a} + 4}{\frac{K_0(h_m a)}{K_1(h_m a)/h_m a} \frac{K_0(k_m a)}{K_1(k_m a)/k_m a} + \frac{K_0(h_m a)}{K_1(h_m a)/h_m a} + \frac{K_0(k_m a)}{K_1(k_m a)/k_m a}} \dots\dots (5.55)
 \end{aligned}$$

ところで、この式(5.54)の右辺における  $D_l$  の中には、式(5.53)の最初の式よりも分るよ  
うに、構造物の相対変位  $\eta_0(z)$  を積分の形で含んでいるが、この  $\eta_0(z)$  は  $p_j(z; t)$  が作用する  
構造物の運動方程式を解くことによって得られるので、結局  $\eta_0(z)$  は積分方程式を構成してい  
ることが分る。さらにまた、表層地盤よりの地震力が、式(5.54)の  $D_l = 0$  としたものであ  
ることは前章までの説明より明らかだろう。

### 5.3 地中基礎構造物の周波数応答

#### 5.3.1 剛構造物の動揺振動

剛な構造物の下端を支える基盤の反力特性は、前章までと同様に回転ばね係数  $k_R$  および粘  
性減衰係数  $c_s$  とすると、下端に回転軸を持つ地中構造物の動揺振動は次のように書き表わ  
せる。

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c_s \frac{d\varphi}{dt} + k_R \varphi = -m_0 H_G \frac{d^2 u_B}{dt^2} + M_0 \quad \dots\dots\dots (5.56)$$

ただし、 $J$ は下端の回転軸まわりの慣性モーメントである。ところで、 $M_0$ は言うまでもなく表層地盤よりの地震力のために生ずる回転モーメントのことであって、式(5.54)を参照すると次式のように算出される。

$$\begin{aligned} M_0(t) &= \int_0^H p(z; t) \cdot z dz \\ &= -\pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ D_l - \frac{\omega^2}{\xi_l^2} \frac{I_l}{J_{ll}} A_0 \right\} I_{lm}'(\omega) \cdot \int_0^H z \cdot \mu(z) Z_m'(z; \omega) dz \cdot e^{i\omega t} \\ &= -\pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ D_l - \frac{\omega^2}{\xi_l^2} \frac{I_l}{J_{ll}} A_0 \right\} I_{lm}'(\omega) \cdot F_m'(\omega) e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (5.57) \end{aligned}$$

ここに、

$$F_m'(\omega) = \mu_1 \int_0^{H_1} z Z_m^{(1)'} dz + \mu_2 \int_{H_1}^{H_1+H_2} z Z_m^{(2)'} dz + \dots\dots + \mu_n \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H z Z_m^{(n)'} dz \quad \dots\dots (5.58)$$

この剛基礎の回転角 $\varphi$ は微小であると考えると、基礎体の任意点 $(0, 0, z)$ の水平変位は

$$\eta_0(z) = z\varphi_0 \quad \dots\dots\dots (5.59)$$

で与えられるので、このとき式(5.57)の $D_l$ は次のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} D_l &= \frac{1}{J_{ll}} \int_0^H \eta_0(z) \cdot \rho(z) Z_l(z) dz = \frac{F_l}{J_{ll}} \varphi_0 \\ F_l &= \rho_1 \int_0^{H_1} z Z_l^{(1)} dz + \rho_2 \int_{H_1}^{H_1+H_2} z Z_l^{(2)} dz + \dots\dots + \rho_n \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H z Z_l^{(n)} dz \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (5.60)$$

かくして、式(5.57)および式(5.60)を式(5.56)に持込めば、調和波外力 $u_B = A_0 e^{i\omega t}$ が基盤より成層地盤へ鉛直上方に入射するときの動揺振動の解は、次式のように得られる。



$$\varphi_0 = \frac{m_0 H_G + \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} F_m'(\omega) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{I_l \cdot I_{lm}'(\omega)}{\xi_l^2 J_{ll}}}{-J \omega^2 + i \omega c_s + k_R + \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} F_m'(\omega) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F_l I_{lm}'(\omega)}{J_{ll}}} A_0 \omega^2 \quad \dots\dots\dots (5.61)$$

したがって、前章までと同様に静的な水平反力と基盤反力との比を  $\chi$  とすれば、 $\omega=0$  に対して

$$\pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{ms}^2 Q_{ms}}{J_{mm}(0)} F_m'(0) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F_l}{J_{ll}} I_{lm}(0) / k_R = \chi \quad \dots\dots\dots (5.62)$$

と書ける。ただし、 $k_{ms}$ 、 $Q_{ms}$  はおのおの  $\omega=0$  のときの、式(5.49)の  $k_m$  および式(5.55)の  $Q_m$  のことである。したがって次式のように

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} F_m'(\omega) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F_l I_{lm}'(\omega)}{J_{ll}}}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{ms}^2 Q_{ms}}{J_{mm}(0)} F_m'(0) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F_l I_{lm}(0)}{J_{ll}}} = f_1 + i f_2 \\ & \frac{H \omega_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} F_m'(\omega) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{I_l I_{lm}'(\omega)}{\xi_l^2 J_{ll}}}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{ms}^2 Q_{ms}}{J_{mm}(0)} F_m'(0) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F_l I_{lm}(0)}{J_{ll}}} = g_1 + i g_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.63)$$

とおくと、式(5.61)は

$$\varphi_0 = \frac{\frac{H_G}{i_0^2} + \frac{1}{H} \left( \frac{\omega_s}{\omega_0} \right)^2 \chi (g_1 + i g_2)}{-\omega^2 + 2 i h_s \omega_s \omega + \omega_s^2 + \chi \omega_s^2 (f_1 + i f_2)} \cdot A_0 \omega^2 \quad \dots\dots\dots (5.61)'$$

と書き直されるので、形式的には第2章および第4章の結果と同様な形に整理できることが分る。したがって、地中構造物の任意点  $(0, 0, z)$  の水平変位の周波数応答倍率  $|\kappa(i\omega; z)|$  は次式で与えられる。

$$|\kappa(i\omega; z)| = \left| 1 + \frac{\frac{H_G z}{i_0^2} + \frac{z}{H} \left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^2 \chi(g_1 + i g_2)}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2 i h_s \frac{\omega_s}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \chi(f_1 + i f_2)} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right| \quad \dots\dots\dots (5.64)$$

このとき、 $\omega_0$  は基準円振動数であり、基準横波速度を  $V_0$  とすると、 $\omega_0 = \pi V_0 / 2H$  で与えられるものとし、その他の記号は前章までと同様であり、以下のとおりである。

$$i_0 = \sqrt{\frac{J}{m_0}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k_R}{J}}, \quad 2h_s \omega_s = \frac{c_s}{J}, \quad m_0 = \rho_s \pi a^2 H_s, \quad J = m_0 \left( \frac{a^2}{4} + \frac{H_s^2}{3} \right) \quad \dots\dots\dots (5.65)$$

ところで、式(5.62)の静的反力比  $\chi$  および構造物の動揺固有円振動数  $\omega_s$  を具体的に計算するに際しては、係数  $c_1$  および  $c_2$  を用いて前章の式(4.50)を参照すると本章においては以下の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \chi &= c_2 \frac{H^3}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{ms}^2 Q_{ms}}{J'_{m\pi(0)}} F'_m(0) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F_l}{J_{ll}} I'_{lm}(0) \\ \frac{\omega_s}{\omega_0} &= c_1 \left(\frac{a}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{a}{H}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{H_s}{H}\right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.66)$$

### 5.3.2 構造物の曲げ振動

たわみやすい構造物の周辺地盤との相互作用を考慮したときの曲げ振動の運動方程式は、前章の式(4.54)と同様にして、次式のように書ける。

$$\rho_p \pi a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + (E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}) I \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} = -\rho_p \pi a^2 \frac{\partial^2 u_B}{\partial t^2} + P(z; t) \quad \dots\dots\dots (5.67)$$

ただし、座標は図 5.3 を参照して、基盤面を原点として、鉛直上方に正方向をとり、 $\eta(z; t)$  は構造物の水平変位(たわみ)、 $u_B(t)$  は入射波の変位を示す。さらに、構造物に関して、 $\rho_p$ : 換算密度、 $a$ : 断面の外径、 $E$ : ヤング係数、 $I$ : 断面 2 次モーメント、 $\epsilon$ : 曲げ振動に対する粘性減衰係数を表わすことは第 4 章と同様である。

そこで構造物の持つ固有関数  $Y_k(z; \nu_k)$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) を, 前章の式 (4.57) を満たすものと考え, 同様にたわみ  $\eta(z; t) = \eta_0(z) \exp(i\omega t)$  が前章の式 (4.58) のように, 直交関数  $Y_k(z; \nu_k)$  で展開できようことから,

$$\eta_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Y_k(z; \nu_k) \quad \dots\dots\dots (5.68)$$

とおいて, この展開係数  $B_k$  を定めることにより, 所期のたわみ  $\eta_0(z)$  を求めることができる。かくして, 式 (5.67) に振動圧  $p(z; t)$  の式 (5.54) を持込むことにより, 次の関係式がえられる。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} B_k \{ (E + i\varepsilon\omega) I \lambda_k' - \rho_p \pi a^2 \omega^2 \} Y_k(z; \nu_k) \\ & + \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{J_{ll}} \int_0^H Y_k(z; \nu_k) \rho(z) Z_l(z) dz \cdot I_{lm}'(\omega) Z_m'(z; \omega) \\ & = \rho_p \pi a^2 A_0 \omega^2 + \pi a^2 A_0 \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{I_l I_{lm}'(\omega)}{\xi_l^2 J_{ll}} \mu(z) Z_m'(z; \omega) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5.69)$$

当然のことながら, 式 (5.69) の右辺第1項は基盤より受ける慣性力の効果であり, 第2項は表層地盤より受ける地震力の効果を表わしている。

そこで, 固有関数  $Y_k(z; \nu_k)$  は前章の式 (4.60) のように正規化しているものとする, 式 (5.69) の両辺に  $Y_i(z; \nu_i)$  を乗じて,  $z$  について  $[0, L]$  で積分を行なえば, 次式をうる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[ \left\{ 1 + 2 i h_k \frac{\omega}{\nu_k} - \left( \frac{\omega}{\nu_k} \right)^2 \right\} \delta_{ki} + A_{ki} \right] = A_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 [L_i + A_i], \quad (i = 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (5.70)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} A_{ki} &= \frac{1}{\rho_p L \nu_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} K_{im}'(\omega) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{K_{kl}}{J_{ll}} I_{lm}'(\omega) \\ A_i &= \frac{1}{\rho_p L} \left( \frac{\omega_0}{\nu_i} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m^2 Q_m}{J_{mm}(\omega)} K_{im}'(\omega) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{I_l}{\xi_l^2 J_{ll}} I_{lm}'(\omega) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.71)$$

および

$$\begin{aligned}
K_{kl} &= \int_0^H Y_k(z; \nu_k) \rho(z) Z_l(z) dz = \rho_1 \int_0^{H_1} Y_k Z_l^{(1)} dz + \rho_2 \int_{H_1}^{H_1+H_2} Y_k Z_l^{(2)} dz + \dots \\
&\quad \dots + \rho_n \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H Y_k Z_l^{(n)} dz \\
K'_{im}(\omega) &= \int_0^H Y_i(z; \nu_i) \cdot \mu(z) Z'_m(z; \omega) dz = \mu_1 \int_0^{H_1} Y_i Z_m^{(1)} dz + \mu_2 \int_{H_1}^{H_1+H_2} Y_i Z_m^{(2)} dz + \dots \\
&\quad \dots + \mu_n \int_{H_1+\dots+H_{n-1}}^H Y_i Z_m^{(n)} dz
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\int_0^H} \right\}$$

$$L_i = \left( \frac{\omega_0}{\nu_i} \right)^2 \frac{1}{L} \int_0^L Y_i(z; \nu_i) dz$$

..... ( 5.72 )

ここで  $\nu_i$ ,  $h_i$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ) は前章と同様に, それぞれ構造物の固有円振動数および粘性減衰定数であって, 次式で与えられる。

$$\nu_i^2 = \frac{EI \lambda_i^4}{\rho_p \pi a^2}, \quad (\lambda_i : \text{固有値}), \quad h_i = \frac{\epsilon I \lambda_i^4}{2 \rho_p \pi a^2 \nu_i} = \frac{\epsilon \nu_i}{2E}, \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \dots (5.73)$$

ところで, 構造物の展開モードの次数 ( $i, k$ ) の増大とともに, 前章における傾向と同様に, 式 (5.70) の右辺の  $A_i$  および  $L_i$  は減少すると考えられるので, 式 (5.70) の展開係数  $B_k$  は有限個 (最初の適当数モード) を対象にすればよからう。

かくして

$$\begin{aligned}
a_{ik} &= \left\{ 1 + 2 i h_k \frac{\omega}{\nu_k} - \left( \frac{\omega}{\nu_k} \right)^2 \right\} \delta_{ki} + A_{ik} \\
c_i &= A_i + L_i, \quad (i, k = 1, 2, \dots, M)
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\left\{ 1 + 2 i h_k \frac{\omega}{\nu_k} - \left( \frac{\omega}{\nu_k} \right)^2 \right\} \delta_{ki} + A_{ik}} \right\}$$

..... ( 5.74 )

とおくと, 式 (5.70) より  $B_k$  は

$$\{B_k\} = A_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 [a_{ik}]^{-1} [c_i], \quad (i, k = 1, 2, \dots, M) \quad \dots (5.75)$$

として求まることは容易に知られよう。

それゆえ, 任意点 ( $0, 0, z$ ) の構造物の相対水平変位 (たわみ) の周波数応答倍率

$|\kappa(i\omega; z)|$  は

$$|\kappa(i\omega; z)| = \left| 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \sum_{k=1}^M [a_{ik}]^{-1} [c_i] Y_k(z; \nu_k) \right| \quad \dots\dots\dots (5.76)$$

で与えられることも、前章のそれと対比すれば明らかであろう。

#### 5.4 数値計算結果とその考察

本章で取扱っている多層地盤とは、各層が均質な地盤が積重なっているものであって、したがって各層に属する諸物理定数は当然一定値であるが、基盤面より上にこれら物理特性の異なる地盤が3層載っている力学モデル系を数値計算の対象にする。このとき密度は各層を通じて一定とし、地盤を表わす代表的な特性値としてせん断弾性係数したがって横波の伝播速度をとり、基準横波速度を  $V_0 = 1$  とするとき、図 5.4 のように各層の横波速度比  $V_1 : V_2 : V_3$  として、(a)  $1 : 2 : 1$ 、(b)  $2 : 1 : 2$ 、(c)  $1.5 : 1 : 0.5$  の3通りに変化させるとともに、層厚比  $H_1 : H_2 : H_3$  をこれらの各速度比に対して、それぞれ  $1 : 1 : 1$ 、 $1 : 4 : 1$  および  $4 : 1 : 4$  の3通りの計9通りについて数値計算を行なう。さらにまた、地盤の変位は水平面内変位のみを対象にして、各層内を伝播する入射波は  $SH$  波であることは、前章までに設定した仮定と同じである。一方、構造物の応答については、剛あるいは柔な円柱基礎に関する理論解析を行なったが、数値計算上では前者のみを対象とする。

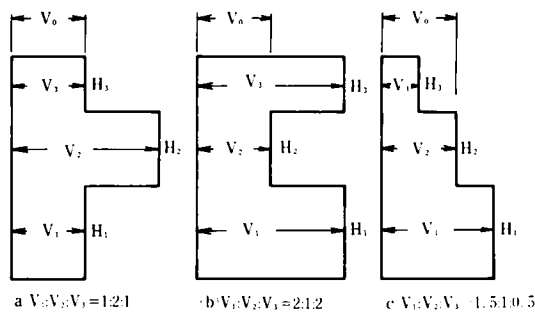


図 5.4 数値計算で用いる層状地盤モデル

かくして、本章で用いた諸定数については、式 (5.66) の係数  $c_1 = 2$ 、 $c_2 = 0.01$ 、地盤の減衰定数 (基準値)  $h_g = 0.1$ 、動揺振動の減衰定数  $h_s = 0.05$ 、縦波  $V_L$  と横波  $V_T$  の速度比 (各層ともに)  $V_L/V_T = 3$ 、構造物の全高さ  $H_s = H$  (全表層厚  $= H_1 + H_2 + H_3$ ) とし、さらに構造物の幾何学形状を  $H/a = 2$  と固定しているために、式 (5.66) より構造物の固有円振動数  $\omega_s$  は

$\omega_s/\omega_0 = 2.248$ となっている（ $\omega_0$ ：基準地盤の1次固有円振動数  $= \pi V_0/2H$ ， $V_0$ ：基準速度）。

#### 5.4.1 多層地盤の振動特性

本章で対象としている地盤は図 5.4 に示したが、これらの水平振動における固有円振動数を算出して一括表示したのが、表 5.1 である。中間層の堅い地盤である(a)および上下層の堅い地盤(b)においては、各次数の固有円振動数は同表最下欄に示す基準地盤（ $V_1=V_2=V_3=V_0=1$ ）に比べて固有円振動数は高くなり、伝播速度の大きな地盤の層厚が大きくなるほど、すなわち表層地盤全体において堅い部分が多いほどその傾向は当然著しくなっている。

表 5.1 3層地盤の固有円振動数

$V_1 : V_2 : V_3$	$H_1 : H_2 : H_3$	$\zeta_1/\omega_0$	$\zeta_2/\omega_0$	$\zeta_3/\omega_0$
(a) 1 : 2 : 1	1 : 1 : 1	1.1 4 7	3.5 2 1	6.0 0 0
	1 : 4 : 1	1.3 9 4	4.6 0 6	7.3 9 4
	4 : 1 : 4	1.0 4 4	3.1 3 3	5.2 3 1
(b) 2 : 1 : 2	1 : 1 : 1	1.3 9 4	4.6 0 6	7.3 9 4
	1 : 4 : 1	1.1 4 7	3.5 2 1	6.0 0 0
	4 : 1 : 4	1.7 2 1	5.2 8 1	9.0 0 0
(c) 1.5 : 1 : 0.5	1 : 1 : 1	1.0 4 7	2.4 1 6	4.2 3 8
	1 : 4 : 1	1.0 8 4	2.8 3 5	4.4 2 4
	4 : 1 : 4	0.9 4 7	2.4 7 2	3.6 7 3
1 : 1 : 1 (基準地盤)		1	3	5

しかしながら(c)の場合のように中間層の速度 $V_2$ のみが基準値 $V_0$ に等しくて、各層の速度が階段状に変化している場合では概して基準円振動数 $\omega_0$ よりも若干大きいようであるが、中間の層厚が小さくなるとこの $\omega_0$ よりも小さい場合もあるようである。またこの(c)のような地盤構成では、1次の固有円振動数が基準値 $\omega_0$ よりも大きくても、高次のそれらは基準地盤の対応する次数の固有円振動数に比べて小さいという特徴があるようである。さらに(a)の $H_1:H_2:H_3=1:1:1$ と(b)の $H_1:H_2:H_3=1:4:1$ の場合および(a)の $H_1:H_2:H_3=1:4:1$ と(b)の $H_1:H_2:H_3=1:1:1$ とにおける固有円振動数は完全に一致することが着目される。このように、一定の固有円振動数を持つ地盤の構成は種々に考えられるので、固有円振動数が一致するからといって必ずしも動力学的な効果が等しいということではないことに注意しなければならない。

図 5.5 の(a), (b), (c)は、式 (5.34) ~ 式 (5.36) および式 (5.37) を満たす水平伝播の波数  $\kappa_m H$  について図示したものであるが、これよりも分るように cut off frequency  $\omega_{cr}$  ( 図中  $\circ$  印 ) よりも円振動数  $\omega$  が小さい領域では分散性の波動 ( 図中の実線 ) は伝播せず、  $\omega > \omega_{cr}$  において初めて分散性の波動 ( 図中点線部 ) が無限遠に逸散することを示している。すなわち、ここに示している波数  $\kappa_m H$  は  $\omega < \omega_{cr}$  ( = 固有円振動数  $\zeta_m$  ) では純虚数として得られ、  $\omega > \omega_{cr}$  では実数である結果を示している。当然のことながら、多層地盤を構成する各層のうち堅い層の占める割合が小さいほど cut off frequency  $\omega_{cr}$  が低下するので、低振動数領域側において分散性の波動が生じやすくなることを示している。いうまでもなく  $\kappa_m H$  が純虚数である範囲 (  $\omega < \omega_{cr}$  ) では表層地盤の水平面内の点は全く位相差なく一様に振動している状態にあり、 $\kappa_m H$  が実数 (  $\omega > \omega_{cr}$  ) では分散性の波動が水平無限遠に伝播して行きもどってこないで、エネルギー損失が生じる。したがって、このことより後出のように運動中の構造物より放射される波動に位相差を生ぜしめ、振動減衰の効果を与えることになる。ところで図 5.5 の(a), (b) 図を比較すると、先に同一の地盤の固有円振動数を共有する地盤構成が幾通りかあったように、この分散性波数  $\kappa_m H$  についても全く同じことが成立していることが分る。したがって地震動のように種々の周波数成分を持つ波動が伝播して行く速度が何らかの方法で測定し得たとしても、その地盤の構成は幾組も考えることになるので、それからだけでは地下構造を定めにくいことを示しているとも言えよう。

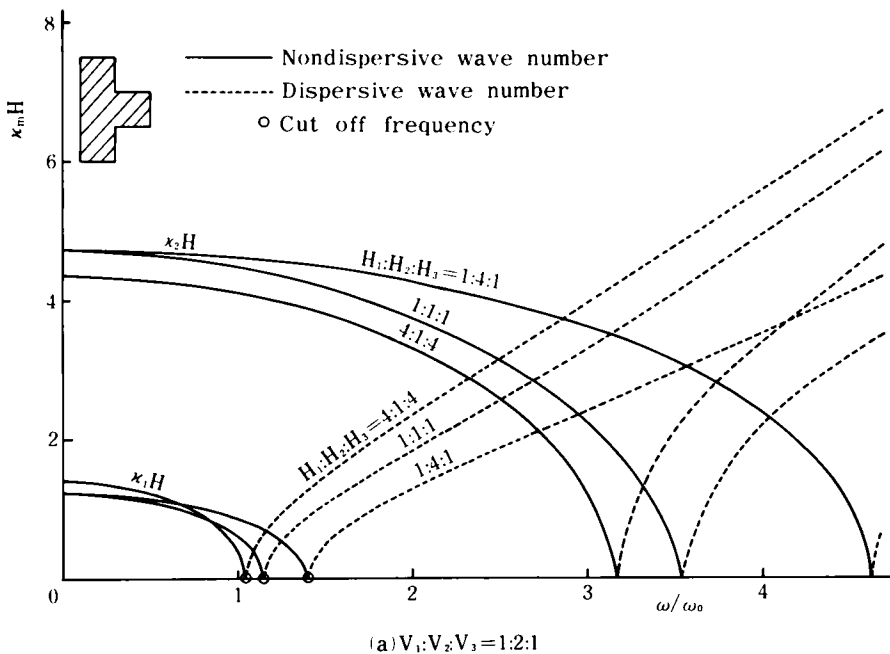


図 5.5 波数  $\kappa_m H$  の周波数依存性

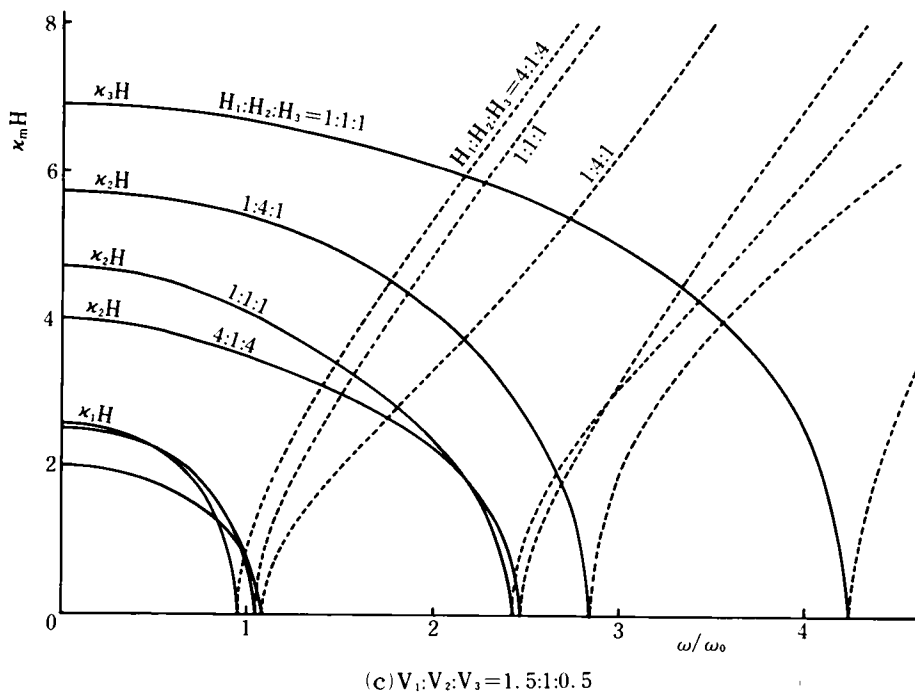
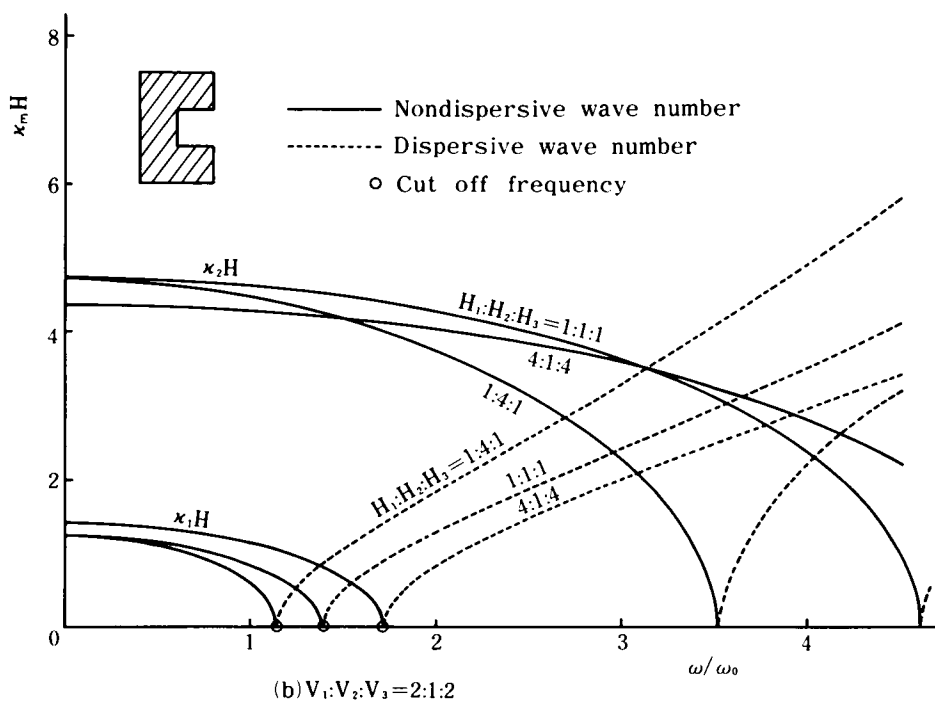


図 5.5 波数  $\kappa_m H$  の周波数依存性



かくして水平方向に伝播する分散性波動の速度もまた円振動数  $\omega$  に依存することになるが、このときの速度  $c_m$  は位相速度と呼ばれ、式 (5.39) の第 1 式で定義されるので、図 5.5 のように各地盤についての分散性の波数  $\kappa_m H$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) が定まれば、 $c_m = \omega / \kappa_m$  として与えられるわけである。一方ある帯域の周波数成分を持つ地震波の伝播においては、上記のように位相速度  $c_m$  が周波数  $\omega$  に依存するので、ある間隔を置いて速い波と遅い波との干渉で波群が生ずるが、この波群の移動速度  $U_m$  は群速度と呼ばれ、式 (5.39) の第 2 式で定義され、3 層地盤では式 (5.43) そのものである。これらの  $c_m$  および  $U_m$  を基準速度  $V_0$  に対する比で示したのが、図 5.6 の (a), (b), (c) である。これら (a), (b), (c) の各種地盤についての特徴は、高円振動数になるにつれて位相速度  $c_m$  と群速度  $U_m$  が、多層地盤を構成する層のうちで最も伝播速度の遅いものに漸近することであろう。また本章で設定した基盤は堅固で基盤内への波動の透過はないとしているので、円振動数  $\omega$  が cut off frequency  $\omega_{cr}$  において、位相速度  $c_m$  は無限大となっており、群速度は当然 0 となっている。しかるに、先に 1 層地盤の場合の  $c_m$  および  $U_m$  について図 5.2 に示したが、その場合両速度は  $\omega$  の増大とともに一定速度に単調に収束して行くことが見られたが、このように 3 層地盤においては  $\omega$  の増大とともに最終的には各層の最小伝播速度に近づくにしても、途中  $U_m$  がこの収束目標速度を一たん越えた後にそれに漸近するといった複雑な近づき方をする場合が多いようである。

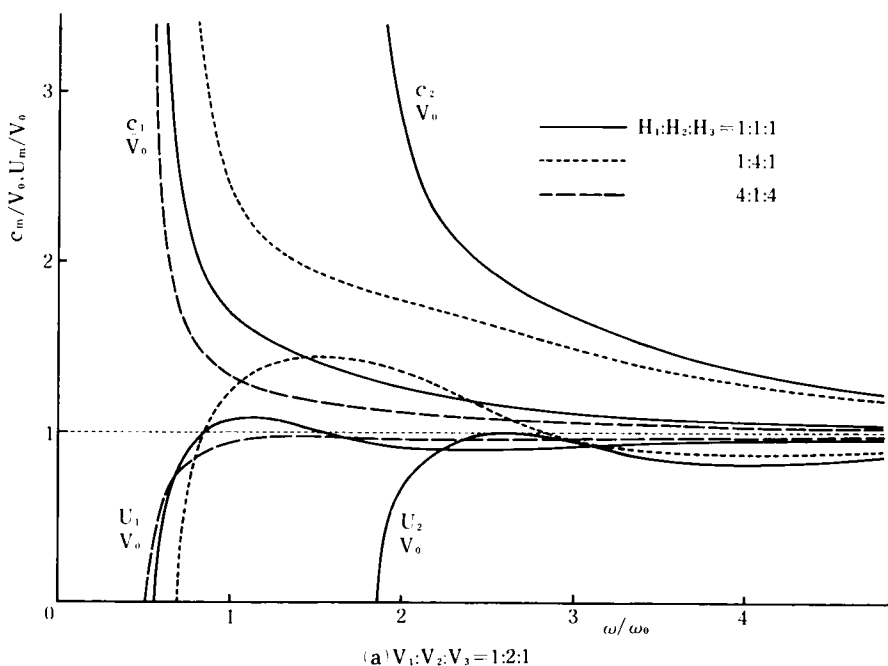
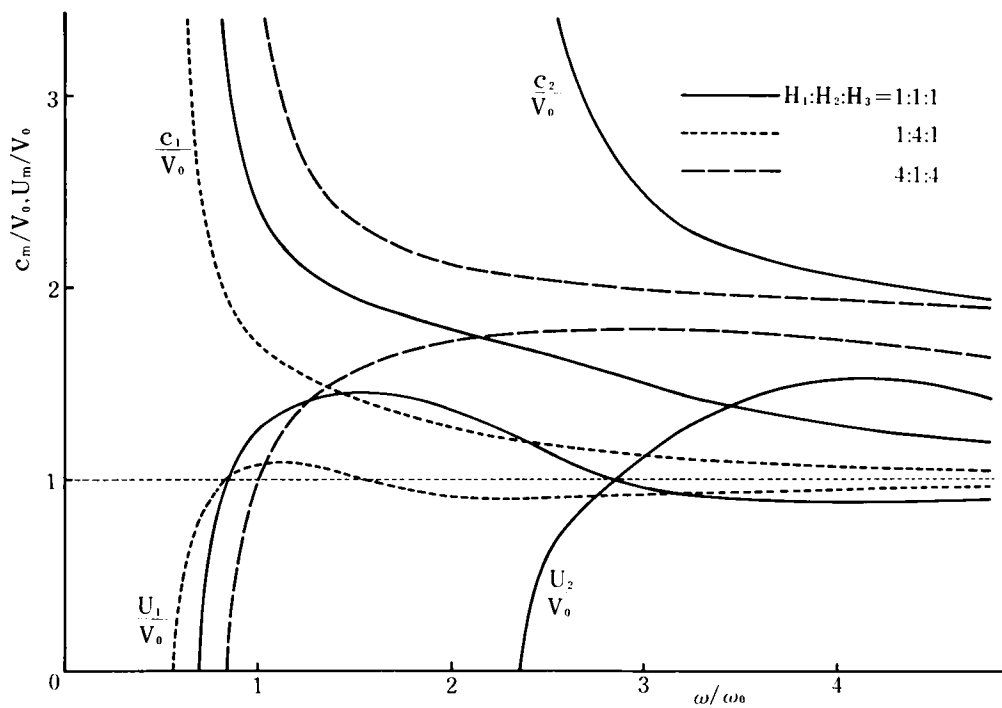
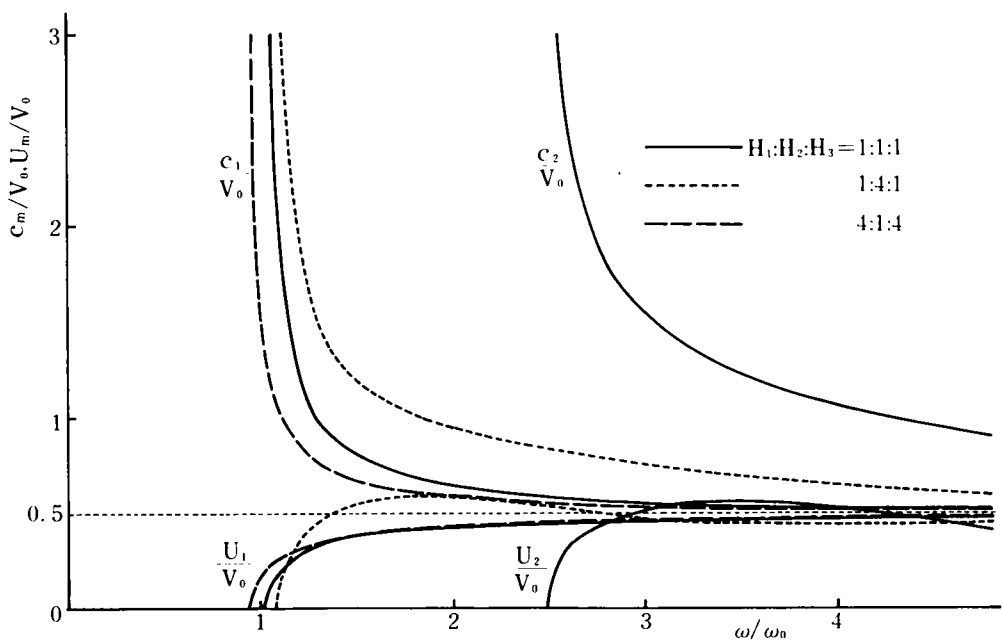


図 5.6 位相速度と群速度の分散性



(b)  $V_1:V_2:V_3 = 2:1:2$

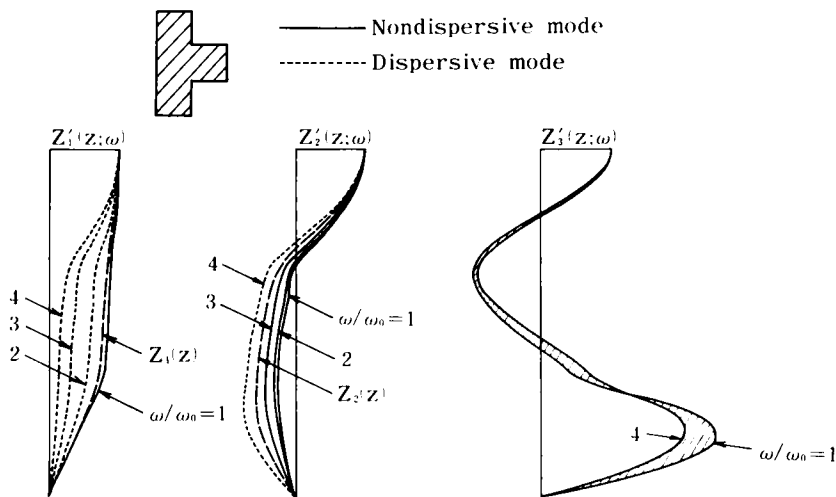


(c)  $V_1:V_2:V_3 = 1.5:1:0.5$

図 5.6 位相速度と群速度の分散性

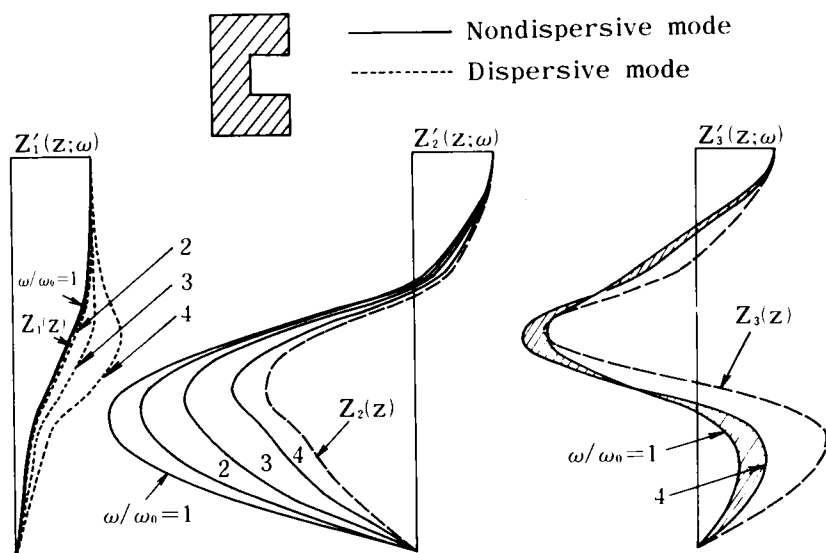
もちろん  $c_m > U_m$  ではあるが、図 5.2 において成立したような  $c_m > \min. (V_1, V_2, \dots, V_n) > U_m$  という関係は円振動数  $\omega$  の如何によっては成立し得ないことが分り、多層地盤中を伝播する波動が 1 層地盤に比べて複雑な反射・屈折をくり返して上記の現象を現出せしめていると言えよう。このように  $c_m$  および  $U_m$  が一定値に容易に収束しない傾向は、図 5.6 の (a), (b) の地盤構成に関しては堅い地盤の層厚が大なるほど著しいことが分るが、(c) のように地盤の堅さが階段状に変化する場合において、中間の層厚が大きいときは、1 次モードの  $c_1, U_1$  が単調に漸近していても、2 次モードの  $U_2$  がやはり極値を持つような接近の仕方をする場合があり、一般的な傾向は捕えにくいようである。

さて、式 (5.34) ~ 式 (5.37) より得られる波数  $\kappa_m$  が一定振動数  $\omega$  に対して、純虚数として無限個、および実数として有限個得られ、これらの固有値  $\kappa_m$  に対してその伝播モードを示す式 (5.38) の関数  $Z'_m(z; \omega)$  が対応することは前に述べたとおりであるが、これらのモード形を各種地盤構成に対して 3 次まで示したのが、図 5.7 の (a), (b), (c) である。これらの図において実線は分散性波動の生じていない場合（全層が位相差のない振動）のモード形であり、点線は分散性波動（逸散性波動）の生じている場合のモード形を示しているが、これらと対比するために、鉛直方向のみに波動伝播が生じるときに持つ多層地盤の固有関数  $Z_m(z)$ （式 (5.15)）を図中に示している。これより水平伝播を考慮するときの固有関数  $Z'_m(z; \omega)$  が円振動数  $\omega$  に明らかに依存していることが分るが、この  $Z'_m(z; \omega)$  が円振動数の増大とともに、 $\omega$  に無関係な固有関数  $Z_m(z)$  の分布形に近づき、さらに  $\omega$  の増大につれてこの  $Z_m(z)$  を通過するとともに、分散性の波動の持つモードに転移することが知られる。

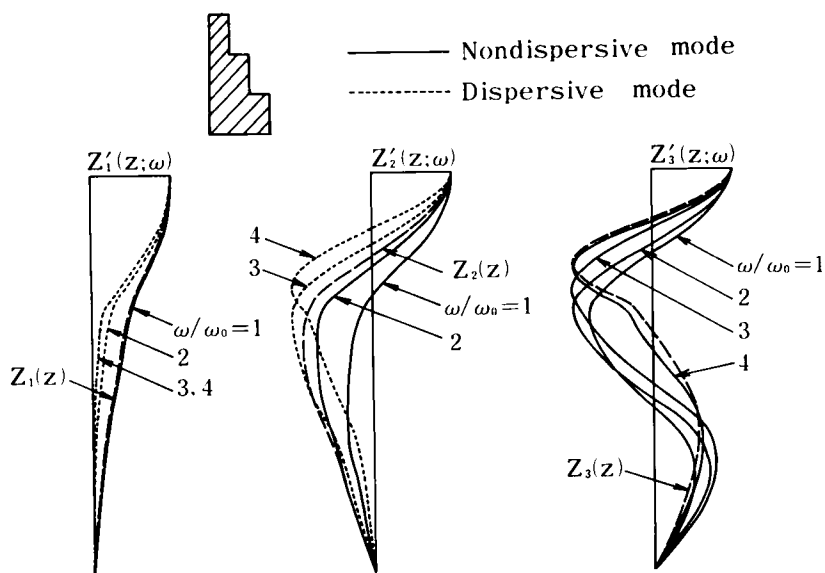


(a)  $V_1:V_2:V_3=1:2:1, H_1:H_2:H_3=1:1:1$

図 5.7 固有モード  $Z'_m(z; \omega)$  の周波数依存性



(b)  $V_1:V_2:V_3=2:1:2$ ,  $H_1:H_2:H_3=1:1:1$



(c)  $V_1:V_2:V_3=1.5:1:0.5$ ,  $H_1:H_2:H_3=1:1:1$

図 5.7 固有モード  $Z'_m(z; \omega)$  の周波数依存性

さらにこの図 5.7 の(a)のように中間層が堅い場合では、振動数の増大とともに  $Z'_1(z; \omega)$  は、第1層（最下層）および第2層（中間層）の振幅が急速に減少していくことを示しており、 $Z'_2(z; \omega)$  は逆に負側（第1層および第2層に相当）の振幅が増大するが、 $Z'_3(z; \omega)$  は最下

層の振幅がきわめて大きいことが注目される。一方同図(b)においては中間層が比較的軟かい場合であるが、 $\omega$ の増大に対して $Z_1'(z; \omega)$ は分散性のモードになるとともに、その中間層の振幅が、(a)の場合とは全く逆に増大して行くことが分る。一方 $Z_2'(z; \omega)$ は低振動数において下層および中間層との境界の振幅が非常に大きく、 $\omega$ の増大とともに急速にその振幅が減少していき、遂には $Z_2(z)$ に近づく様子がよく示されている。さらに $Z_3'(z; \omega)$ でも中間層あるいは下層において大きな振幅を持つようであるが、このように(b)のように中間層が軟い地盤構成では高次のモードの影響が大きいと言えよう。最後に同図(c)のように階段状分布では、 $Z_1'(z; \omega)$ については(a)の場合と同様に $\omega$ の増大とともに中間層および下層の振幅が激減し、さらに $Z_2'(z; \omega)$ については $\omega$ の増大とともにモードの腹に当る点が次第に上方に移動していくことが見られるが、この傾向は $Z_3'(z; \omega)$ についても受け継がれている。しかしながら、各次数のモード振幅がそれほど大きくはないことは、同図(a), (b)の地盤構成において得られる傾向とかなり相違している点が注目されよう。このように中間層のみの硬軟性は分布関数 $Z_m'(z; \omega)$ の振幅分布に大きな影響を持つが、これが階段状に変化する場合には $Z_m'(z; \omega)$ の振幅にそれほど顕著な影響を与えないようである。

さて、上記のようなモード形 $Z_m(z)$ や $Z_m'(z; \omega)$ でもって展開された応答が以下の図であるが、図 5.8 は表層地盤の変位、ひずみおよび地震力について示したものである。同図の(a), (b), (c) のいずれの場合も上図が地盤の変位とひずみの絶対値を、下図が地震力の絶対値の鉛直分布であって、各図は第 1 次共振点近傍の分布形ではあるが、絶対最大値を示しているものではない。まず地盤の変位およびひずみについては同図の(a)の上図より分るように、堅い中間層で変位およびひずみの変化は小さいが、同じ伝播速度の地盤でも軟い下層の層厚が小さいほど下部の地盤のひずみが急増し、地中構造物の先端が基盤まで達しているならば、このような地盤構成が大きな負担を与えることにもなる。 (b)は上下層が堅い場合であって、軟い中間層で全変位の大半が生じており、当然中間層厚が小さいときは全体の変化も減少気味であるが、ひずみ量としてはよほど中間層の層厚が大きい限り(a)の地盤に比べてそれほど問題としなくてもよからう。一方(c)では上層より順に堅くなっていく地盤構成であるが、この場合上層の層厚がある程度大きい場合は上層と中間層との境界でのひずみがきわめて大きくなることが注目されるが、中間の層厚が大きいときは各境界面でのひずみが同程度のものに近づくが、それほど大きくはないようである。このように上層あるいは下層に軟かい地盤が存在するときは、構造物躯体の設計にとって十分な配慮が必要であろう。

一方図 5.8 の下図の地震力の絶対値の鉛直分布はきわめて複雑な形をしているが、各れの地盤構成の場合でも地表面での地震力が大きいことが特徴であろう。各層の境界では地震力は不連

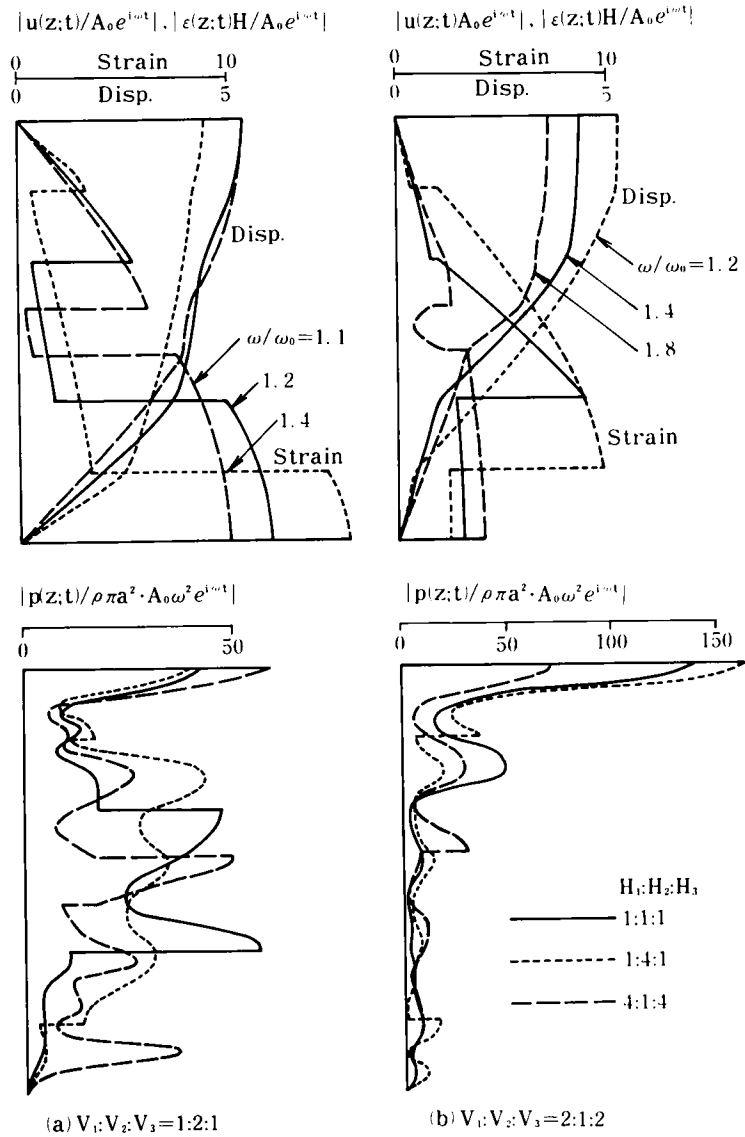


図 5.8 表層地盤の変位，ひずみおよび地震力の鉛直分布

続になっているのは，式 (5.54) において，せん断弾性係数  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) が各層において異なるため，結局地震力の境界面での食違いは伝播速度の 2 乗  $V_j^2$  に比例してくることになるろう。(a)のように中間層に堅い地盤が存在すると，中間層での地震力も表層と同程度になるようであるが，(b)のように中間層のみが軟かい地盤のときには，地震力は表層のそれに比べてきわめて小さいと言えよう。さらに(c)の地盤構成ではかなり大きな地震力が生じうようであり，結局表層地盤全体で軟かい地盤が下層にあるほど大きな地震力が起りうると言えよう。

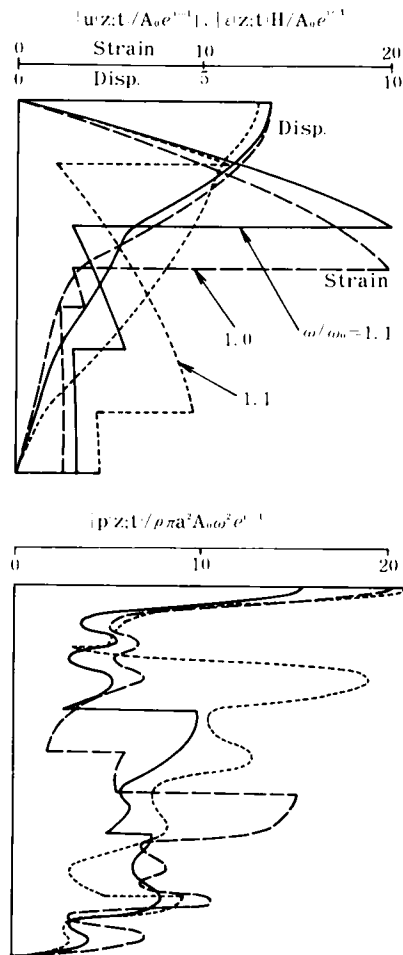


図 5.8 表層地盤の変位、ひずみおよび地震力の鉛直分布

ところで地盤変位を周波数領域で示したのが図 5.9 であるが、ここには代表的に地表面変位の絶対値を図示してある。(a), (b) のような地盤構成では伝播速度の大きな地盤つまり堅い地盤が全表層に占める割合が大きいほどその地表面変位も小さい特徴がよく現われていると言えよう。一方(c)のような地盤の堅さが下層に至るほど堅くなる場合では、各層厚に無関係にほぼ一定の応答変位を示すようであり、前 2 者の傾向とは大部異なることが知られる。ここで図として示されていないけれども、やはり地表面において、式 (5.26) で与えられる地盤の変位、速度に関するパワースペクトル密度  $S_u(H; \omega)$  および  $S_v(H; \omega)$  は、この図 5.9 の縦距を 2 乗したものにほかならないので、その共振点のピークが強調された曲線になることは明らかであろう。また図 5.8 における地震力の分布はかなり複雑であったが、同様にその周波数領域におけ

る変動の例を示したのが図 5.10 である。やはり表層地盤の 1 次共振に対応する共振を示すことが分るが、2 次以降の共振の影響は全く現われてこず、このことは構造物への入力を非常に単純化して考えてもよからうことを示すものと言えよう。

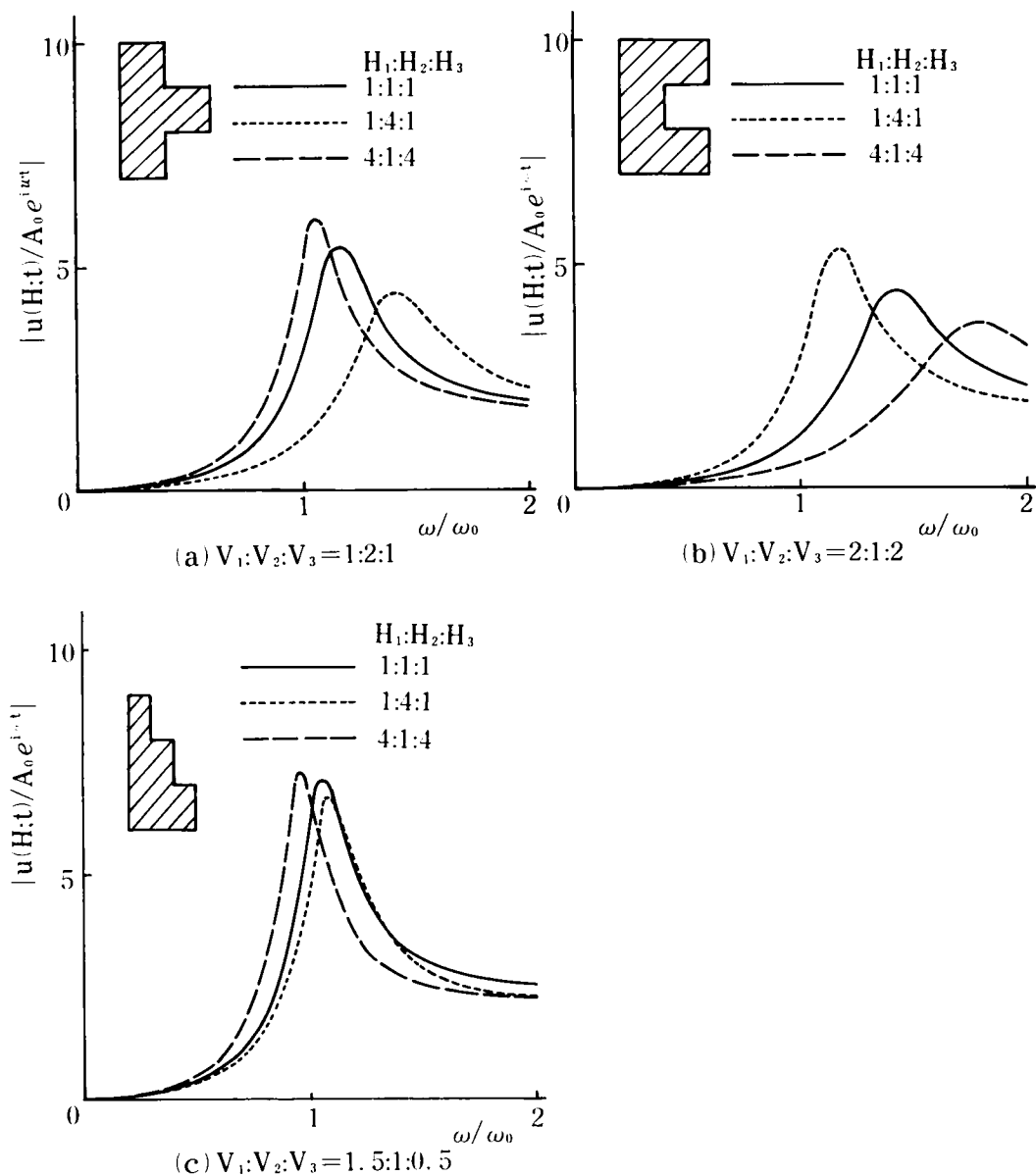


図 5.9 地表面変位の周波数応答



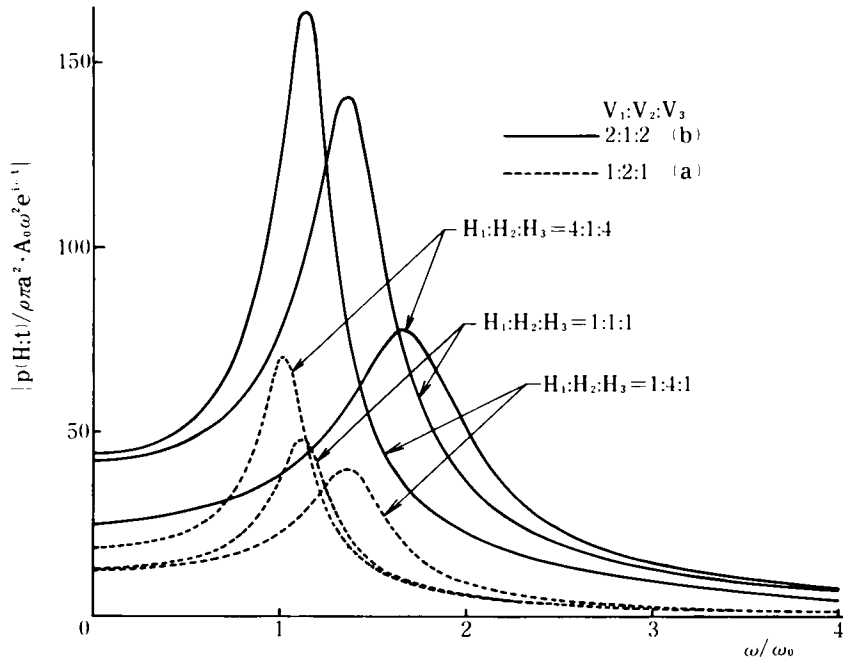


図 5.10 地表面における地震力

#### 5.4.2 剛構造物の動揺振動

これまでは主として地盤自身の振動特性について論じてきたが、ここでは表層地盤の構造物に対する作用について数値計算結果を通して考察を行なう。したがって、その整理の方法は第2章、および第4章のそれらと同じであり、本章では地盤構成の差異が剛構造物の動揺振動に及ぼす影響に注目する。まず図 5.11, (a), (b), (c) は表層地盤のばね剛性としての作用を実部  $f_1$  および虚部  $f_2$  に分けて図示したものであるが、これら3図より分るように、円振動数  $\omega$  に対する  $f_1$ ,  $f_2$  の一般的傾向は前章までの1層地盤におけるそれと同様である。すなわち(a), (b), (c) のいずれの地盤構成においても、振動数  $\omega$  が表層の基本円振動数  $\zeta_1$  (= cut off frequency  $\omega_{cr}$ ) を越えると逸散性(分散性)の波動が生ずるために、虚部  $f_2$  が急激にほぼ直線的に増大して行くことを示しており、 $\omega > \omega_{cr}$  ( $= \zeta_1$ ) ではいわゆる逸散減衰の効果が大きく作用することが分る。また  $\omega < \omega_{cr}$  における  $f_1$  の減少の傾向はほぼ円振動数  $\omega$  の2次曲線的であると考えられるので、前章までの説明のように、この低周波領域では地盤は構造物に対して質量作用とばね作用の両作用が混在する現象であるといえよう。一方、実部  $f_1$  は、いわば構造物を支えるばね剛性であって、分散性の波動が生ずる周波数領域では、動的な剛性は静的なそのほぼ半分程度に低下することが知られる。ばね剛性の動的効果  $f_1$  に関しては(a),(b)のような層構

成では、軟かい地盤の層厚が大きいほど小さく、(c)のような層構成では中間層（標準地盤と一致）の層厚が大なるほど剛性効果が低下することを示している。もちろんばね剛性の量的な比較は式(5.61)'の分母第4項よりも知られるように、静的反力比 $\chi$ を実部 $f_1$ に乗じたもので行なわねばならないことは言うまでもなからう。

一方、逸散による減衰 $f_2$ はこの系の粘性減衰定数に等価的に置換しうるものとして、前章の考察で述べたように、これを $h_{eq}$ と記すと、 $f_2$ のこう配 $\beta$ 、表層地盤と基盤の静的反力比 $\chi$ および構造物の固有円振動数 $\omega_s$ 、地盤の基準円振動数 $\omega_0$ に対して

$$h_{eq} \cong \frac{\beta}{2} \chi \frac{\omega_s}{\omega_0}$$

で与えられるので、これに基づいて算出した $h_{eq}$ を一括表示したのが表5.2である。同表の(a)は中間層の堅い場合であって、層厚にあまり関係なく地中構造物に対してほぼ同程度の減衰効果を及ぼすことを示しており、(b)の中間層に軟い地盤が存在している場合では、堅い地層の占める割合が大きいほど換算減衰量 $h_{eq}$ は大きくなることが分る。一方(c)の地盤では中間層が大きいほどその換算減衰量は大きいことを $h_{eq}$ が示しているが、特に中間の層厚がそれほど大きくない場合の換算減衰量 $h_{eq}$ が、(a)、(b)の地盤構成において換算されるそれに比べてかなり小さいことは注目されよう。

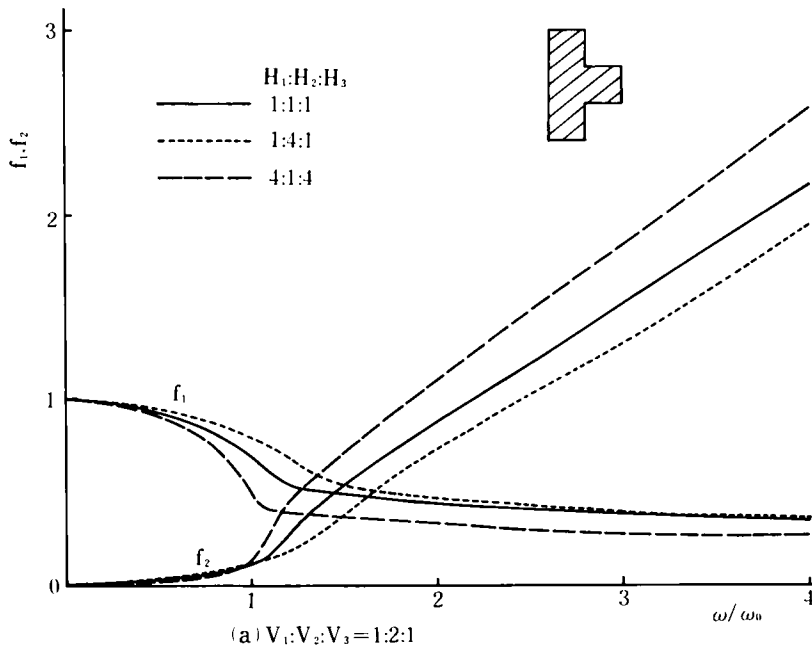


図 5.11 表層地盤のばね剛性の動的効果

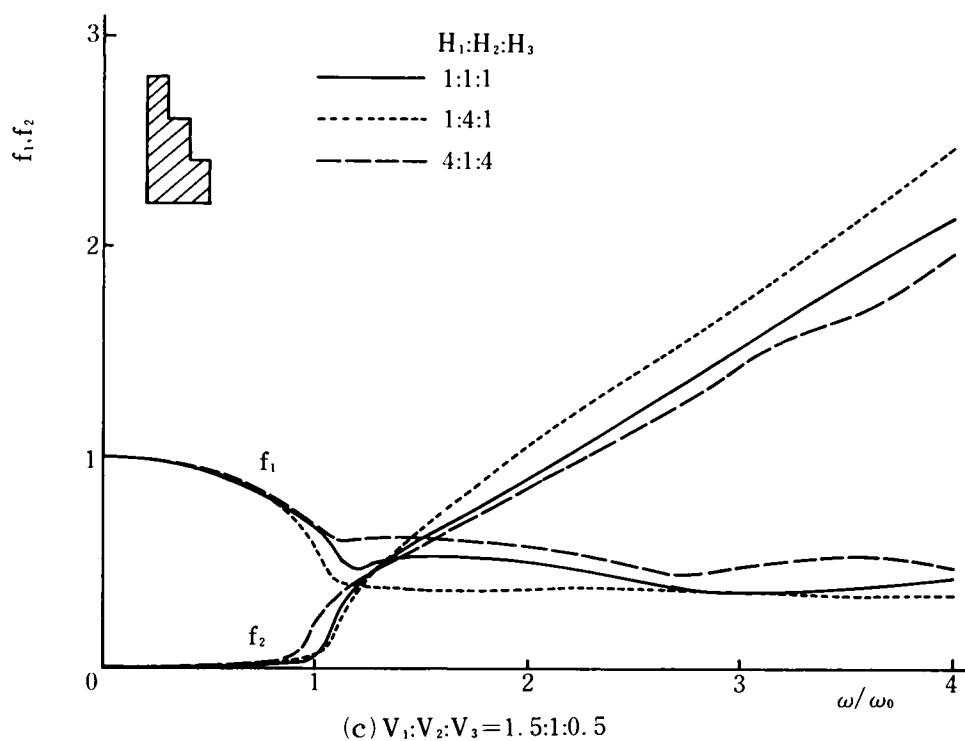
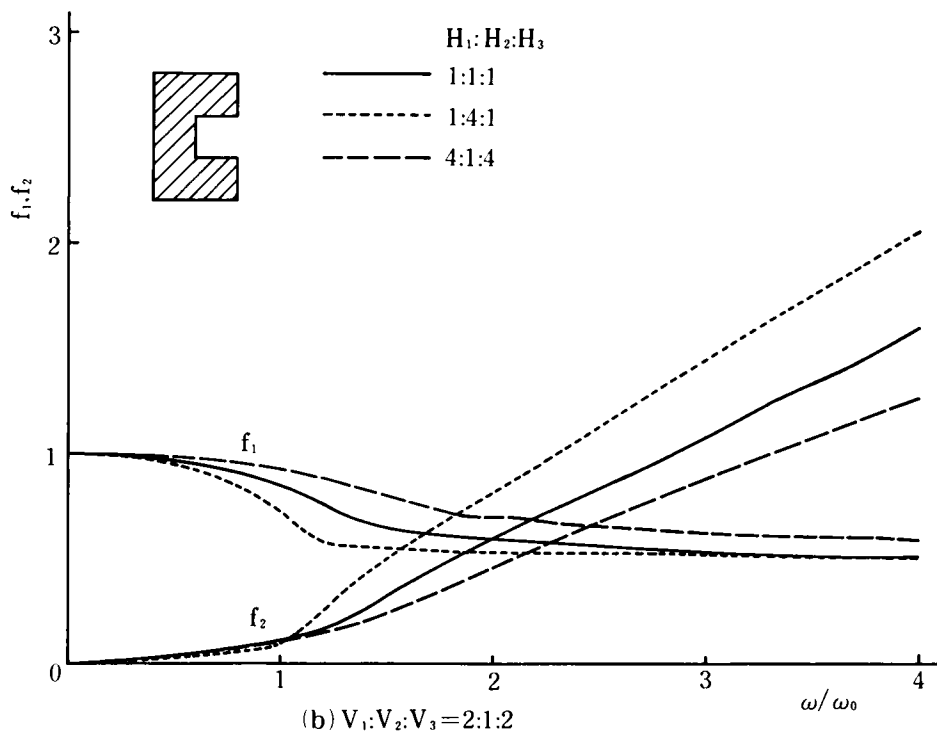


図 5.11 表層地盤のばね剛性の動的効果

次に図 5.12 に示したのは、表層地盤が地中構造物に及ぼす地震力の動的効果を(a), (b), (c) の地盤について示したものであるが、前章までの結果と同様にいずれの場合においても 1 自由度系の応答特性にはほぼ類似していることが認められる。このとき(a), (b) 図が示すように、軟弱な層厚が大きいほど地震力の動的効果 ( $g_1 + i g_2$ ) の実部  $g_1$  および虚部  $g_2$  ともに大きいという特徴を持っている。さらに(c)のような成層地盤では中間層厚が大きいときは、若干動的効果が増すことが見られる。しかしながら、構造物への影響の度合は、式(5.61)' の分子第 2 項の形よりも分るように、 $(g_1 + i g_2)$  にさらに  $(\omega_s/\omega_0)^2 \chi$  を乗じたものが、地震力による回転モーメント量であるから、地震力の大小を  $g_1 + i g_2$  でもって比較はできないことはばね剛性効果  $\chi f_1$  について述べたとおりである。

表 5.2 換算減衰定数  $h_{eq}$

$V_1 : V_2 : V_3$	$H_1 : H_2 : H_3$	$h_{eq}$
(a) 1 : 2 : 1	1 : 1 : 1	0.264
	1 : 4 : 1	0.242
	4 : 1 : 4	0.271
(b) 2 : 1 : 2	1 : 1 : 1	0.279
	1 : 4 : 1	0.250
	4 : 1 : 4	0.338
(c) 1.5 : 1 : 0.5	1 : 1 : 1	0.115
	1 : 4 : 1	0.337
	4 : 1 : 4	0.131

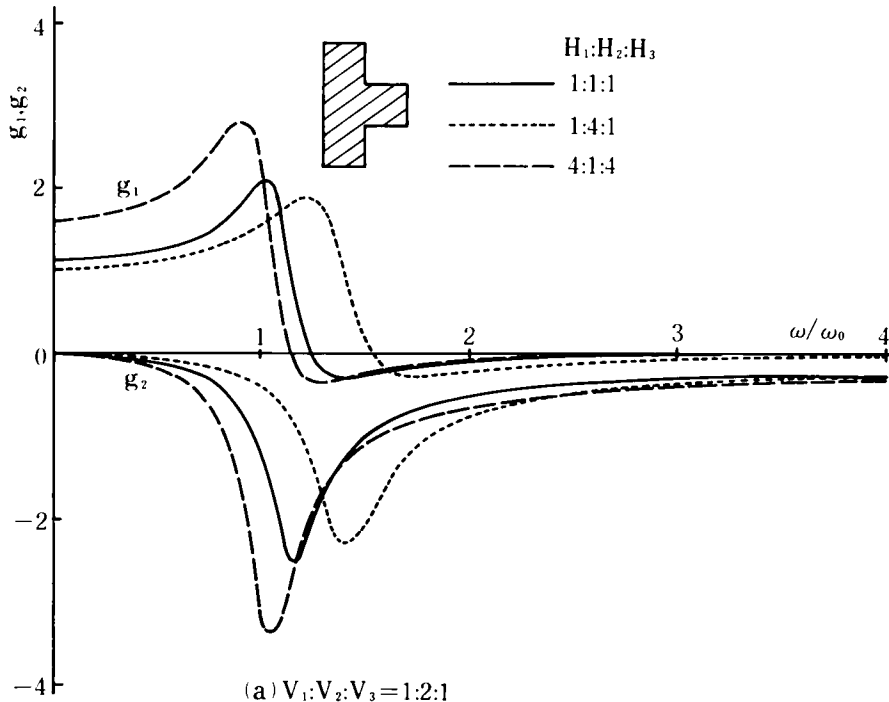


図 5.12 表層地盤の地震力の動的効果

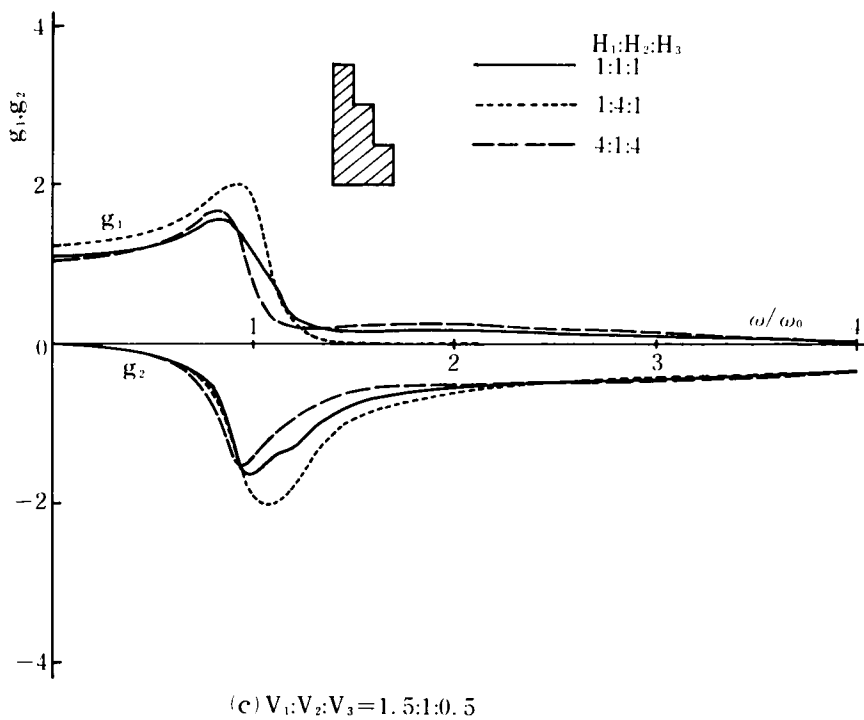
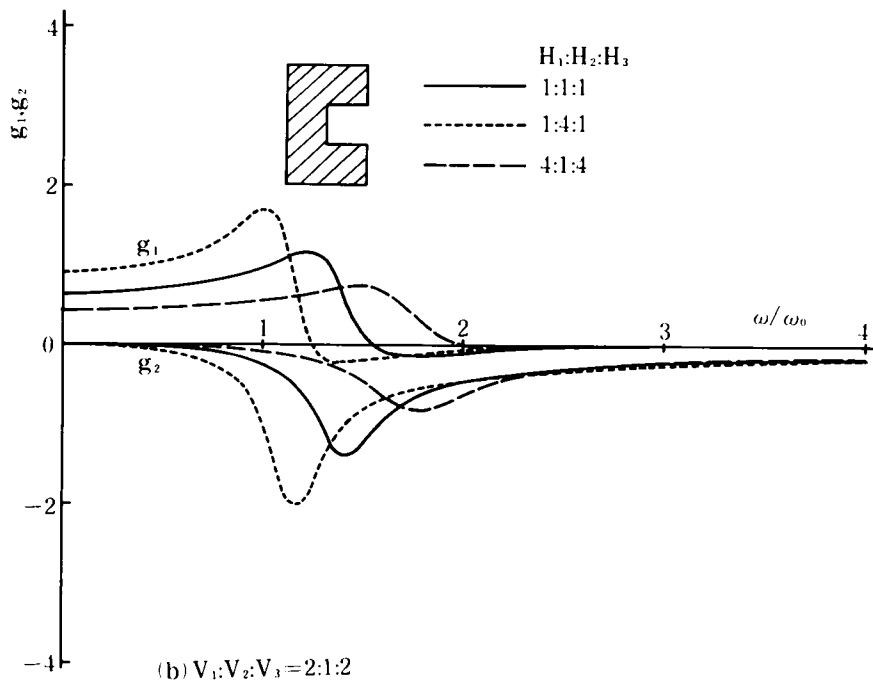


図 5.12 表層地盤の地震力の動的効果

上記のような、表層地盤が構造物に対して見かけ上發揮する効果をばね剛性 ( $f_1 + i f_2$ ) および地震力 ( $g_1 + i g_2$ ) に分離して検討してきたが、これを用いて剛構造物が動揺振動をする際の、その頂部の水平変位の周波数応答倍率を示したのが図 5.13 の(a), (b) および(c)である。まず(a)のように凸型の剛性分布をする多層地盤内の構造物にあっては、堅い中間地盤の層厚が大きいほど、構造物は表層の1次の共振の影響をより大きく受け、逆にその層厚が小さい場合は表層地盤の影響は小さくなるとともに、 $\omega = \omega_s$  による構造物自身の共振振幅が増大する傾向があることが知られる。ところで、図 5.9 の(a)に見たように、地盤のみの応答変位は、軟い地層部分の占める割合が大きいほどその振幅が大きく出ていたにもかかわらず、上記の構造物の応答には逆にほとんどその影響が現われてこないのは、地震力としては小さいことにほかならないであろう。このことは、地中あるいは地表面での観測結果より得られた地震波形の大小が、構造物の応答の評価には直接には結びつかないことを示すことにもなる。次に(b)のように凹型の分布の地盤にあっては、凸型分布の(a)の傾向と同様に、図 5.9 の(b)における軟い中間層の大きいときの地盤変位の増大が、構造物の応答に対してはその影響が小さいことは上述と同様の理由によるものであろう。一方同図(c)のように剛性分布が階段状であるような地盤にあっては、層厚と関係なく地盤の効果が構造物の応答にあまり現われることなく、構造物の共振が大きくなるようであり、このことは前2者の傾向と大きく異っており、地盤構成の差異が構造物の応答に大きな影響を与えることを明白に説明している。さらにまたこれらの地盤構成の如何にかかわらず構造物の共振振動数がほとんどすべて高振動数側へ移動するのは、明らかに地盤にばね作用が卓越することにほかならないであろう。

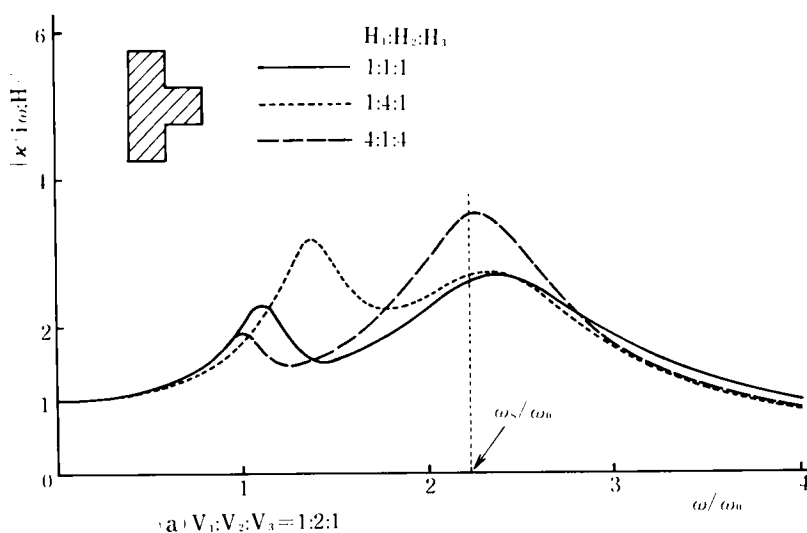


図 5.13 構造物の周波数応答倍率

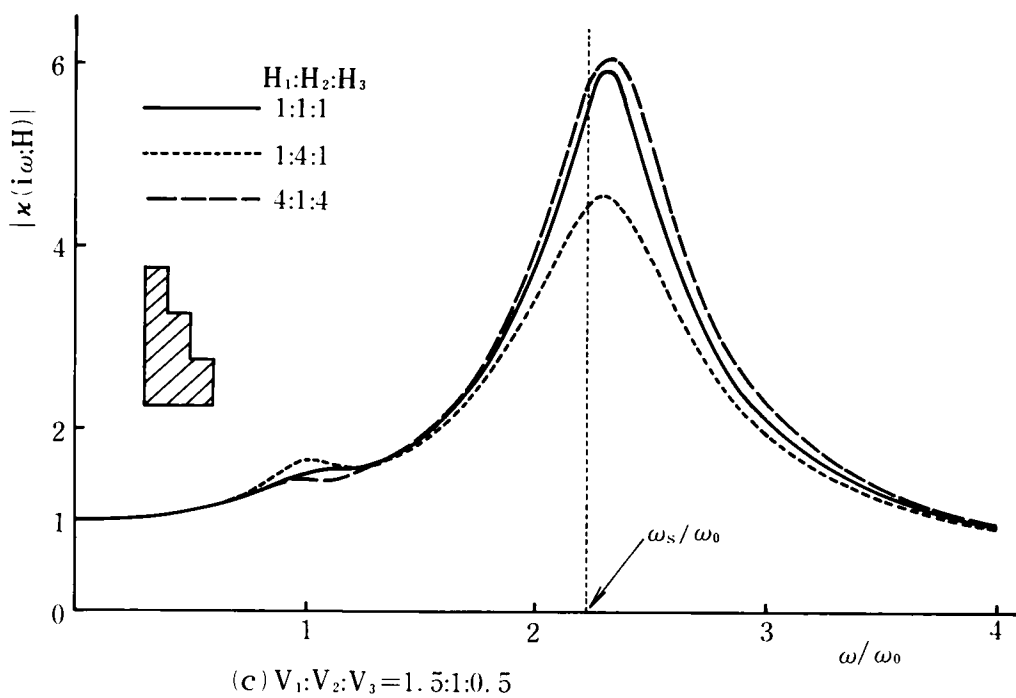
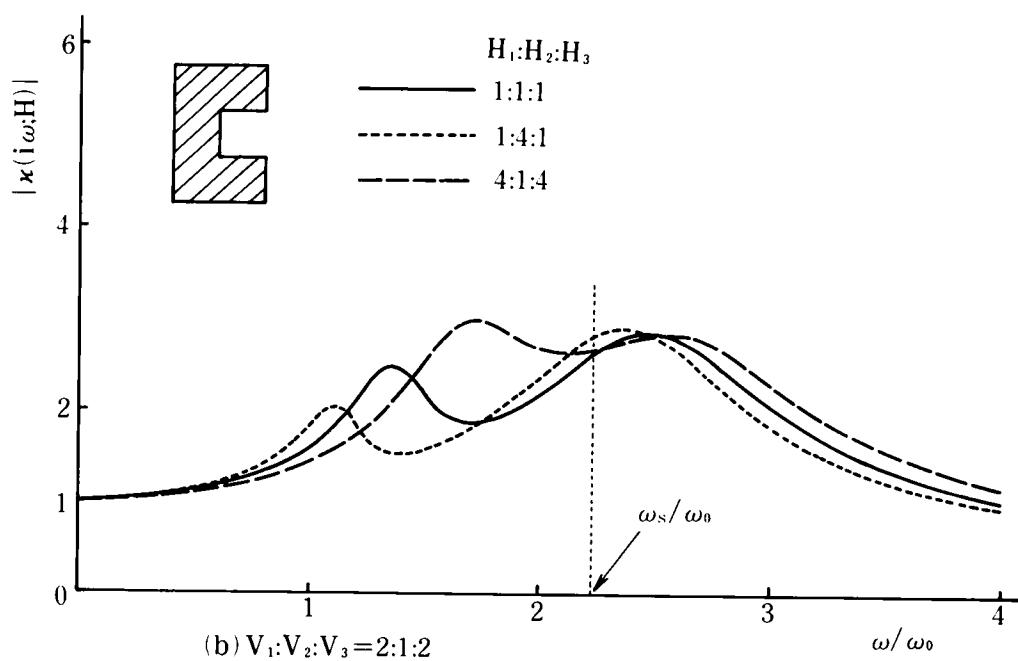


図 5.13 構造物の周波数応答倍率

## 5.5 結 言

構造物の基礎を地中に深く打設しようとするとき、これを支持する周辺地盤の物理特性が不連続的に急変する際には、その耐震性に関して判断を下しかねる場合があろう。本章はこのような観点に立脚して、多層地盤および埋設構造物の相互作用系について理論展開を行ない、数値計算によって多層地盤における波動伝達特性および地中構造物の応答について検討を加えたものである。本解析が前章までの1層地盤の場合と最も異なる点は、次のとおりである。すなわち前章までの1層地盤においては、入射波および構造物表面よりの放射波が上下両境界面で反射をくり返すけれども基盤内への透過が生じないとしているので、屈折が生ぜず、したがって入射波はもちろんのこと放射波の鉛直方向成分波は、基盤面で変位が0、地表面で応力が0という確定した境界条件のもとに固有方程式(5.40)を解くことになるので、鉛直方向に伝播する波数が解析的にかつ水平伝播波数とは無関係に得られることが明らかである。

一方表層が2層以上の層より成るときは途中に不確定の境界面が存在するために、鉛直方向の波数が固有方程式より独立には定められず、常にそれと外力の円振動数と水平方向の波数との3者の結合関係を満たしつつ存在するので、本章中にも述べたように固有関数が外力の円振動数の関数になり、上述の1層地盤の場合とは根本的に異なってくるわけで、多層地盤中にある構造物表面よりの放射波は当然この複雑な振動数に依存した固有関数を用いて展開せねばならないことが分る。この点が前章までの解析と大いに異なる点でもあり、また1層地盤がきわめて特殊な場合であることが知られよう。数値計算上は、3層より構成される表層地盤を対象にしたのが、外力の円振動数が変化するたびに、放射波の固有関数を逐一計算しなければならない。このようにして本章で得た結論を要約すると以下ようになる。

- (1) 鉛直方向のみの伝播に対する、固有関数は各層の密度を重みとして直交関数群を形成するが、放射波に関する固有関数は振動数に依存し、せん断弾性係数を重みとして直交関数群を形成する。
- (2) 多層地盤においては、固有円振動数および分散性の波速に関して、全く同じ結果を与える幾つかの地盤の組み合わせが存在しうる。
- (3) 多層地盤の位相速度および群速度は、外力の円振動数に対して一般には単調な変動をしないが、高振動数になると表層を構成する各層における最小の伝播速度に漸近する。
- (4) 中間層がきわめて軟いか堅い場合は、軟い部分の表層に占める場合が大きいほど、地盤の応答変位は大きい。剛性が下層ほど大きくなる地盤構成では、層厚に関係なくほぼ一定の応答変位を示す。



- (5) 外力の円振動数の増大に対して、分散性波動が生じない範囲ではばね剛性効果は円振動数の2次曲線に比例的であって、質量・ばね作用が共存するが、分散性波動が生じるとともに、ばね作用は静的な場合のその約半分程度に低下する。
- (6) 逸散による減衰効果は、多層地盤の剛性分布が凸型では層厚にほとんど無関係に一定であるが、凹型分布では堅い地層厚が大きいほど減衰効果も大きく、地盤の剛性分布が階段状の場合は中間層厚の大きいほど減衰効果は大きい。
- (7) 前章までと同様に、表層より剛構造物に作用する地震力は1自由度系の応答曲線で近似的に置換しうる。
- (8) 剛性分布が凹あるいは凸型の多層地盤では軟い地盤の変位が大きくとも、構造物にとっては軟い地盤は地震力の効果が小さく、堅い地盤が構造物に大きな影響を持つが、一方本章における階段型の地盤構成では、周辺地盤は構造物にとってそれほど大きな影響を持たない傾向にある。
- (9) 多層地盤中の構造物の場合も、地盤の剛性効果のため共振振動数は増大する傾向にある。

以上が本章の要約であるが、多層地盤のうち下層に剛性の低い地盤が存在するときは、その層にきわめて大きなひずみを生ぜしめ、このとき地盤には十分な線形耐荷力が継続するものとしているわけであり、実地盤では考えられないような大きなひずみが生ずる場合があると推察され、今後は境界層での応力に非線形的考慮をした解析<sup>11), 12), 13)</sup>との対応についても検討がなされねばならないであろう。

## 補 遺

本章の解析においては地盤に粘性減衰が存在するにもかかわらず、非減衰振動の固有モードを持つ水平伝播波数  $k_m$  を式(5.32)より決定し、これを用いて近似的な展開を試みた。しかるに本来はこのような粘性減衰作用の存在する場合は、式(5.49)の  $k_m$  にみるように、実数または純虚数の波数ではなくて、一般には複素数の波数  $k_m$  を式(5.32)より決定し、しかる後この複素波数  $k_m$  を用いた複素モード  $Z'_m(z; \omega)$  でもって展開しなければならないのである。しかしながら、この複素固有値  $k_m$  を式(5.32)の固有方程式より決定することはきわめて困難であり、ここでは前章までの結果等を参照すると内部減衰効果が逸散減衰効果に比べて小さいであろうとの前提のもとに、先述の近似的な取扱いを行なったものである。結果的にはほぼ妥当であろうことが分ったが、今後は複素固有値  $k_m$  を求めて、この近似的な手法との比較を行なわなければならない。

さらに本解析では、理論的には層は幾層あっても可能であるが、それに伴ってその多層系

の固有円振動数  $\omega_m$  を式 (5.11) より、一方放射波の波数  $\kappa_m$  を固有方程式 (5.32) より定めねばならないが、これらの式は形式的に簡潔であるとともに、数値計算上でもこの方程式を複素ベクトルの形のままで使用した方が都合の良いことが多い。実際、これらの式 (5.11) あるいは式 (5.32) は超越方程式であるから 3 層以上 ( $n \geq 3$ ) の系では、ベクトル表示ではなくて、通常の数値方程式に直したものは急速にその繁雑さを増し、本章で用いた Newton-Raphson 法による解法が妥当ではないことを付記しておく。

## 参 考 文 献

### 第 1 章

- 1) 金井 清：地震工学，共立出版，1969，pp.35～39.
- 2) 前出 1) の pp.1～4.
- 3) 岡本舜三：地震力を考えた構造物設計法，オーム社，1954，pp.86～90.
- 4) J. Penzien, R. A. Parmelee, C. F. Schreffey, B. H. Seed and G. R. Thiers:  
Seismic Effects on Structures Supported on Piles Extending Through Deepclays,  
Institute of Engineering Research, Univ. of California, SESM 64-2, 1964.
- 5) 田治見宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について，日本地震工学シンポジウム  
(1966)講演集，1966.10，pp.255～260.
- 6) 後藤尚男・土岐憲三：水中橋脚の振動と耐震設計に関する基礎的研究，土木学会論文集，  
第100号，1963.12，pp.1～8.
- 7) 小坪清真：だ円形水中橋脚に働く地震力とその弾性振動－水中構造物の耐震設計に関する  
研究－，土木学会論文集，第120号，1965.8，pp.14～24.
- 8) T. K. Caughey and H. J. Stumpf: Transient Response of a Dynamic System under  
Random Excitation, Jour. of App. Mech., Ser. E, No. 4, Dec. 1961, pp.563～566.
- 9) S. O. Rice: Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and  
Stochastic Processes, Dover, 1943, pp.133～317.
- 10) A. M. Freudenthal, and M. Shinozuka: Probability of Structural Failure under  
Earthquake Acceleration, 土木学会論文集，第118号，1965.6，pp.9～15.
- 11) 小松定夫：長大吊橋の耐風設計法と安全性について，土木学会論文集，第142号，  
1967.6，pp.10～19.
- 12) 後藤尚男・亀田弘行：構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について，京都大  
学防災研究所年報，第11号A，1968.3，pp.239～253.
- 13) 後藤尚男・秋吉 卓：弾性地盤中にある基礎構造物の地震応答特性－楕円断面を有する剛  
基礎－，土木学会論文報告集，第177号，1970.5，pp.21～32.

### 第 2 章

- 1) 田治見宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について，日本地震工学シンポジウム  
(1966)講演集，1966.10，pp.255～260.

- 2) 伯野元彦・野尻陽一：ケーソンの動特性に関する一研究，土木学会論文報告集，第170号，1969.10，pp.9～21.
- 3) 前出 1)
- 4) 後藤尚男・秋吉 卓：弾性地盤中にある基礎構造物の地震応答特性—楕円断面を有する剛基礎—，土木学会論文報告集，第177号，1970.5，pp.21～32.
- 5) H. Goto, K. Toki and T. Akiyoshi: Vibrational Analysis of Foundation Structures with Elliptic Cross Section in Elastic Ground, Bull. of Disast. Prev. Res. Inst., Vol. 18, Part 1, July 1968, pp.59～88.
- 6) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓：弾性地盤中にある楕円形基礎の振動性状，京都大学防災研究所年報，第11号A，1968.3，pp.255～274.
- 7) N. W. McLachlan: Theory and Application of Mathieu Functions, Dover, 1964.
- 8) 前出 1)
- 9) 後藤尚男・山田善一・ほか4名：土木建築耐震設計施工，朝倉書店，1968，pp.306～307.

### 第 3 章

- 1) A. M. Freudenthal and M. Shinozuka: Probability of Structural Failure under Earthquake Acceleration，土木学会論文集，第118号，1965.6，pp.9～15.
- 2) 土岐憲三：地震動のシミュレーションとその応用，京都大学防災研究所年報，第11号A，1968.3，pp.291～303.
- 3) J. L. Bogdanoff, J. E. Goldberg and M. C. Bernard: Response of a Simple Structure to a Random Earthquake-type Disturbance, Bull. of Seism. Soc. of Am., Vol. 51, No. 2, April 1961, pp.293～310.
- 4) 前出 1)
- 5) 小松定夫：長大吊橋の耐風設計法と安全性について，土木学会論文集，第142号，1967.6，pp.10～19.
- 6) 後藤尚男・亀田弘行：構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について，京都大学防災研究所年報，第11号A，1968.3，pp.239～253.
- 7) S. O. Rice: Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover, 1943, pp.133～317.

- 8) V. V. Bolotin: Statistical Methods in Structural Mechanics, Holden-day, 1968, pp.155～166.
- 9) 北川敏男: マルコフ過程, 情報科学講座 A・5・1, 共立出版, 1967.
- 10) 前出 6)
- 11) T. K. Caughey and H. J. Stumpf: Transient Response of a Dynamic System under Random Excitation, Jour. of App. Mech., Ser. E, No. 4, Dec. 1961, pp.563～566.
- 12) 前出 2)
- 13) 前出 2) および 3)

#### 第 4 章

- 1) 例えば, Y. Sato: Study on Surface Waves, V. Love Waves Propagated upon Heterogeneous Medium, Bull. of Earthq. Res. Inst., Vol. 30, Part 1, March 1952, pp.1～11.
- 2) 緒方信英・小坪清真: 杭基礎に作用する水平地震力について, 日本地震工学シンポジウム (1966) 講演集, 1966.10, pp.55～60.
- 3) 土岐憲三: 不均質性地盤中にある構造物の地震応答, 第3回日本地震工学シンポジウム (1970) 講演集, 1970.11, pp.73～80
- 4) J. Penzien, R. A. Parmelee, C. F. Schreffey, B. H. Seed and G. R. Thiers: Seismic Effects on Structures Supported on Piles Extending through Deep Sensitive Clays, Institute of Engineering Research, Univ. of California, SESM 64-2, 1964.
- 5) I. M. Idriss and B. H. Seed: Seismic Response of Horizontal Soil Layer, Proc. of ASCE, SM4, July 1968, pp.1003～1031.
- 6) 後藤尚男・土岐憲三・吉原 進: 多自由度表示による地盤-構造物基礎系の振動解析について, 京都大学防災研究所年報, 第29号A, 1969.3, pp.273～287.

#### 第 5 章

- 1) 金井 清: 地震工学, 共立出版, 1969.
- 2) 後藤尚男・土岐憲三・横山康夫・亀田弘行・秋吉 卓・石田昌弘: 松代群発地震地域における橋りょうおよび地盤の震動観測結果について, 京都大学防災研究所年報, 第10号A, 1967.3, pp.201～219.
- 3) 後藤尚男・土岐憲三・横山康夫・亀田弘行・秋吉 卓・石田昌弘: 松代群発地震地域における震動観測結果について, 土木学会論文集, 第145号, 1967.9, pp.1～11.

- 4) 後藤尚男・土岐憲三・横山康夫・亀田弘行・秋吉 卓：強震観測装置による松代群発地震記録の解析，京都大学防災研究所年報，第 11 号 A，1968.3，pp.275～290.
- 5) 後藤尚男・土岐憲三・亀田弘行・秋吉 卓・小西純一・吉原 進：えびの地震および 1968 年十勝沖地震の余震観測結果について，京都大学防災研究所年報，第 29 号 A，1969.3，pp.67～85.
- 6) I. M. Idriss and B. H. Seed: Seismic Response of Horizontal Soil Layer, Proc. of ASCE, SM4, July 1968, pp.1003～1031.
- 7) 前出 2)
- 8) 前出 3)
- 9) 前出 4)
- 10) W. M. Ewing, W. S. Jardetzky and F. Press: Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, 1957.
- 11) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓：地盤の非線型せん断振動について，第 8 回地震工学研究発表会講演概要，1965.10，pp.5～6.
- 12) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓：弾塑性地盤のせん断振動について，土木学会第 21 回年次学術講演会講演概要，1966.5，pp.98-1～98-2.
- 13) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓：弾塑性地盤中にある杭の水平振動について，土木学会昭和 41 年度関西支部年次学術講演会講演概要，I，1966.11，pp.203～204.

## 結

## 論

本論文は第2章より第5章まで一貫して、地中に設けられた基礎構造物の振動特性とその耐震性について、種々の角度より理論解析を試み、数値計算を行なって検討を加えたものである。理論解析と現象の把握を容易にするために、対象とする構造物は円あるいは楕円断面を持つものとし、周辺の支持地盤は半無限弾性体として、これが堅い基盤に支えられて、基盤より鉛直上方に地震波が入射する力学モデル系を想定した。このようにして得られた研究成果を以下のように総括することにより、本論文の結論とする。

まず第2章では、基礎構造物として楕円断面を持つ剛構造物が均質な単層地盤内にあって、その下端が基盤面に密着しているような系の動特性について理論解析を行ない、その結果表層地盤の持つ固有関数で展開した解析結果は、Fourier級数で展開したものと全く同一の結果を与えることを示した。またSH波が鉛直下方より来襲するとき、その振動数が表層の基本振動数より小さいときは、構造物周辺地盤は表層内のいずれの点とも位相差なく一様に振動するが、いったん振動数がそれより大きくなると構造物表面より放射する波動が水平方向無限遠へ逸散して行き、このため周辺地盤に位相差を生ぜしめ、これが構造物に大きな減衰効果を持つことを示した。さらに表層地盤が構造物との相互作用の結果、上記の逸散減衰の効果のみならず、表層の基本振動数より小さい振動数領域においては質量効果とばね剛性の効果とが共存し、それより大きい振動数領域ではばね剛性の効果が卓越するが、断面の偏平な方向へ振動するとき、このばね作用が負の剛性をも持ちうることを明らかにした。偏平な断面ではその最急曲率点に応力の集中が生じ、そのため構造物に働く地震力は大きく、構造物の応答においてはその断面の長軸・短軸のいずれの方向に振動するかによって、表層地盤の作用の内容が異なることも明らかにし、この点は耐震設計上で留意すべきであることを示唆した。

第3章では、前章と同一の系が地震動のように不規則な外力を受けるときの応答を、確率過程として処理し、応答確率量を理論的に誘導するとともに、その評価について論じた。入力と応答が時間領域で一義的に結合するためには、この系の単位衝撃応答関数が必要であるが、周波数領域で入出力を結合している周波数応答関数をFourier逆変換により時間領域にもどす際に、本章ではその周波数応答関数が複雑すぎるために、表層の動特性をなるべく損わないような表示式で部分的な置換えを行なうことにより、構造物と周辺地盤との連成を考慮した構造物の単位衝撃応答関数を解析的な形で導いた。そして断面の長軸方向に振動するとき、この単位衝撃応答関数が連成効果のため最初の1周期の前後に過去の応答履歴をいったん遮断する効

果を発揮することを示した。また定常確率過程においては、応答確率量のある設定レベルを越える平均回数は、レベルの高低とともに振動方向によって左右されることを示し、また非定常確率過程における応答確率量は、入力地震動の卓越振動数と表層地盤の基本振動数との相対関係によって、その地震動への追従性に大きな差が生じることを明らかにした。さらに確率量の評価において、その設定レベルが標準偏差の2倍程度より大きい場合は、超過確率分布と平均超過回数とは同じ意味を持つことをも指摘した。

第4章では、基盤上にある単層地盤が鉛直方向に不均質性を有する半無限地盤であるとき、この地盤中に根入された円断面の剛あるいは柔な構造物の周波数応答特性について論じた。表層地盤はせん断弾性係数が深さの1乗あるいは2乗に比例して滑らかに変化するものとしたとき、まず表層の固有関数を理論的に導き、これを用いて構造物に作用する振動圧を求めると、前章までと同様に構造物の変位を自身に含む、いわゆる連成系を構成することを解析的に明示した。一方柔構造物にあつては所期の変位が積分方程式を構成するので、これを構造物の固有関数で展開することによって求める手法を示した。このとき展開係数を決定する多元連立方程式においては、実用地盤と構造物の連成項を無視しても差しつかえなく、これにより柔構造物のたわみ形の展開はあたかもモーダルアナリシスにおけると同様に評価しうることを示した。この表層の不均質性が増大すると、地盤の低次モードにはそれほどの影響を与えないが、高次モードの変化が地表面に近づき、周辺地盤より受ける構造物への地震力の最大作用点が下方に移動し、その地震力の分布は地盤の剛性分布と表層地盤の1次モード形との積で近似的に表わしうることを指摘した。また不均質性の高い地盤にあつては、地震力は大きいが構造物への影響は逆に小さくなることも示した。さらに柔構造物にあつては、各モードに対応する表層地盤の剛性効果、減衰効果あるいは地震力等が、剛構造物の場合と同様に評価しうることを示すとともに、上載荷重の有無、構造物全高と表層厚との関係が構造物の応答変位および曲げモーメントに及ぼす影響についても言及した。

第5章では、表層地盤が均質であるが、その剛性の異なる地盤が基盤上に幾重にも積重なったもので構成されていて、その中に構造物が基盤面まで根入されている系を解析した。まず多層地盤の固有値を定めるべき方程式を複素行列積による表示式で誘導し、この行列積の各要素は各層の物理特性を受渡すいわゆる伝達マトリックスの役目を果たすることを示した。前章までとは異なり、構造物表面よりの放射波の持つ固有モードが、振動数の関数となるので、入力の振動数が異なると固有モードも異なり、入力の振動数がcut off frequencyすなわち表層の固有振動数より小さいときは、表層は全層一様な振動状態になるが、一方この振動数より大きくなると、分散性の波動が生じて、この波動は各層のうちの最小の伝播速度に漸近する傾向のある



ことを示した。また同一の固有値あるいは固有の波数を共有する幾組かの地盤の組合わせが可能であって、水平方向に伝播する分散性の波動の速度を計測し得ても、それに該当する地盤構成が幾組か考えることから、地震動の伝播速度のみより必ずしも地盤構造を決定し得ないことを示した。さらに動的な剛性効果が静的なその約半分程度に低下し、前章までと同様に逸散性の減衰が粘性減衰として評価しうることを示すとともに、それらを等価な減衰定数に換算して量的な比較を行ない、多層地盤の剛性分布様式とその層厚の如何は、構造物の応答に重大な影響を持ち、特に軟弱な層が下方に存在する場合は耐震上に十分の注意を要することを指摘した。

わが国の土木工学の分野で、世界的な規模の大型連絡橋の実現も迫りつつあり、基礎構造物とその周辺地盤との動的結合性の問題はますます重要度を増しつつある現時点にあって、“地盤と構造物の相互作用”という観点から取組んできた研究成果をまとめたのが本論文である。しかしながら、最初に緒論でも触れたように、本文での基盤の取扱い方に若干の問題点を残していたので、本文と並行して構造物の下部を支える基盤との動的結合性について検討を行なった研究の一部を付録Aに掲げた。この場合もやはり基盤を半無限連続弾性体として取扱ったが、いかなる方向にも有界領域を全く有しない本付録Aのような解析では、振動数の大小に関係なく必ず逸散性の波動が生ずるので、媒体に内部減衰作用を考慮しなくとも構造物の応答は常に有限値にとどまることを理論および数値解析の両面より示し、それらは実験結果とも比較的对応していることを検証した。このようにして、本文の研究とともに、付録Aでの成果が合理的に結合された暁に、地中構造物の動力学特性ないしはその耐震性に関する情報がより信頼性を増すものと期待される。

現在のように科学の進歩と発展があってもなお、地震などの自然の脅威が依然として人間に不意に襲いかかってくる現状を考えれば、構造物の耐震設計に一層の合理性かつ信頼性が要求される。このような点より、地盤と構造物の問題は緊急を要する研寄課題であるが、本研究が幾分なりともこの方面に資するところがあれば、著者の喜びこれにすぐるものはない。

なお本研究の数値計算は、京都大学大型計算機FACOM230-60および九州大学大型計算機FACOM230-60によったことを付記する。

最後に本研究を遂行するにあたり終始ご指導ご鞭撻賜わった京都大学教授 後藤尚男先生、ならびに本論文をまとめるに際しご鞭撻ご助言頂いた京都大学現名誉教授 石原藤次郎先生に衷心より謝意を表する次第である。また本論文作成にあたり、ひとかたならぬご配慮をいた

いた熊本大学工学部土木工学教室の諸先生，および数値計算等で協力頂いた京都大学工学部交通土木工学教室後藤研究室の諸兄に対し謝意を表わす次第である。

## 付 録

### A. 地表面上剛構造物の動揺振動

#### A.1 概 説

地表面上にあるかまたは比較的根入れの浅い構造物は、土木・建築構造物のうちでも最も普通に見られるものである。このような構造物の安定はそのほとんどを底面下部を支持する地盤に依存していることは言うまでもないが、特に地震時の振動特性の解明は耐震設計上欠かすことはできない。常時は地盤は構造物の自重を鉛直上向きに支え、耐荷力のある限りこの静的釣合い状態をいつまでも保持するが、一度地震に見舞われると、地盤の動的支持力の差異によって構造物の被害に著しい差異が生ずることになる。すなわち、1923年の関東大震災を経験してから、従来の静力学的耐震設計法に対する批判からようやく、支持地盤について注目が払われるようになってきたが、近年において1964年の新潟地震ほど支持地盤と構造物との相関性の高いことを如実に示した事例はなかったであろう。それ以後構造物と周辺地盤との相互作用についての研究が、理論のみならず実験面においても著しい進展を見せていることは周知のとおりである。

さて、地表面上の構造物の動的問題というのは当然工学者の興味を引く問題であるが、もともとは Lamb<sup>1)</sup> が、半無限弾性体の表面上に点加振をしたとき、それによって生ずる波動の伝播逸散機構を発表したことに端を発すると見なされている。以後 Reissner<sup>2)</sup> が半無限媒体の境界面上に具体的な断面積を持った加振体を密着させた振動系を研究の対象とするに及んで、初めて工学の問題として登場してきたわけである。

ところで、このような系を解析するためには、本来は構造物との接触面での地盤の動的応力分布が不明なので、変位が連続、それ以外の点では応力が0という混合境界値の問題として取扱わねばならないので、これの厳密な解析はきわめて困難である。そこで Reissner は接触面下の地盤の応力分布を静的な分布で近似し、これを Fourier-Bessel 展開して境界条件を応力で統一して解析を進めたが、それ以来このような振動系を取扱った研究者はほとんど彼の方法を踏襲してきたと言っても過言ではない。この方面の研究は現在まで多くの人々によってなされてきているが、その前半は主として機械基礎の振動として進展してきた。この方面の代表的研究者としては鳥海<sup>3)</sup>、Arnold・Bycroft・Warburton<sup>4)</sup>らが挙げられよう。一方それよりやや遅れて地表面上の構造物特にベタ基礎の建築構造物の動特性について研究が進められて

きたが、この代表的な研究者として田治見<sup>5)</sup>や小堀ら<sup>6)</sup>が挙げられよう。特に小堀らは実建築構造物の断面が、ほとんど例外なく矩形であることから、矩形断面の構造物の周波数応答に関して、3重 Fourier 変換を用いて解析を進めている。

さて、これらの解析はほとんど例外なく周波数応答に関する特性を調べたものであり、最終結果に無限積分を含んでいる。したがって一般的傾向はその都度複雑な数値積分によるしか方法がなく、地盤と構造物の相互作用を考慮した応答の理論展開をなす上に不都合であることは否定できなかった。田治見はその解析結果より、接触面内における静的な点加振の厳密解を拡張した、等価な半理論式で表現し、それを矩形断面にまで適用している。

本研究も同様に、剛な構造物が半無限弾性地盤上に載っている場合を対象にしたものであって、構造物の動揺振動においては、地盤の変位は鉛直成分が卓越するものと考え、他の変位成分を無視した。このとき、地表面上の点加振による Green 関数が、田治見が得た半理論式とほとんど一致することが分った。もちろん、厳密にはこの Green 関数を、構造物底面下の変位式と見なすことは、境界条件の点から若干の問題はあるが、結果的には田治見の式と一致し、厳密解と大差ないことが示されており、本研究におけるこの Green 関数を用いた解析は一応妥当なものと思われる。

従来の応答解析においては、入力方向が断面の主軸に沿った場合がほとんどであったので、応答方向も同一方向でよかったが、実際上は地震等によって加振される方向は主軸と一致する場合はむしろまれであると言わねばならない。もし任意の方向に加振されたとき、構造物はその断面が円形でない限り、応答方向は入力方向と一致するとは言えないであろう<sup>7)</sup>。本研究はこのような点について、応答方位角、振動アドミッタンス、回転ばね剛性および構造物の応答角変位について、理論および実験を通して検討を加えたものである。

## A.2 動揺振動の方向性とアドミッタンス

### A.2.1 点加振による半無限弾性体の応答

変位に関して上下方向の成分  $w$  のみを考慮するときは、図A・1のような等方均質弾性体内の微小立方体に関しての釣合方程式は

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - f_z(t) \quad \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

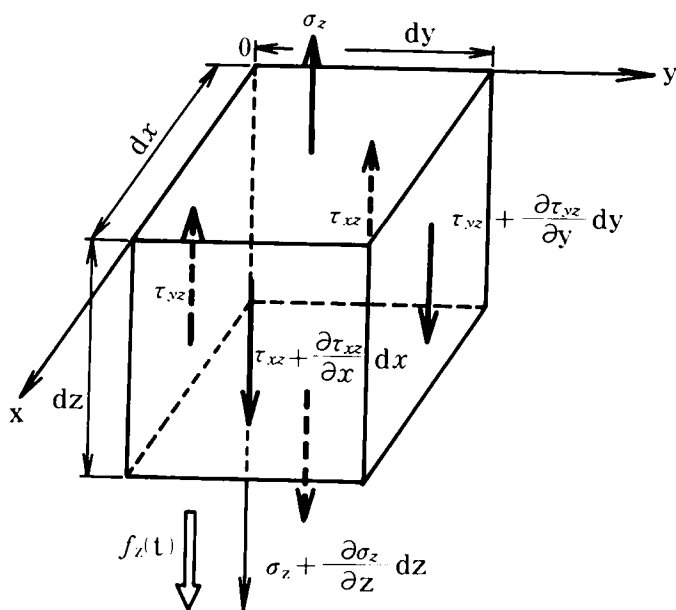


図 A・1 微小立方体に働く鉛直応力

と容易に書き表わせる。ここに、

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad \cdots \cdots (A \cdot 2)$$

である。式 (A・2) を式 (A・1) に代入すれば、次式をうる。

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - f_z(t) \quad \cdots \cdots (A \cdot 3)$$

ここで、 $f_z(t)$  は

$$f_z(t) = P e^{i\omega t} \quad \cdots \cdots (A \cdot 4)$$

なる定常調和加振力として、応答  $w$  の定常解を

$$w = w_0 e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 5)$$

とすると、式( A・3 )より次式をうる。

$$V_L^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + V_T^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \omega^2 w = - \frac{P}{\rho} \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 6)$$

ここに、 $V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  : 縦波伝播速度、 $V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  : 横波伝播速度

そこで、

$$k_T = \frac{\omega}{V_T} \quad ( \text{ : 波数} ) \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 7)$$

と置いて、さらに座標変換

$$z = \frac{V_L}{V_T} z'' \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 8)$$

を用いて式( A・6 )を整理し直すと

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z''^2} + k_T^2 w_0 = - \frac{P}{\mu} \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 9)$$

そこで、式( A・9 )を解くのに次のような Green 関数を用いることを考える。すなわち、ここで対象とする地盤と物理的特性が同一の無限弾性体における Green 関数を  $G_0 ( x, y, z'' | x', y', z' )$  とすれば、これは

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial z''^2} + k_T^2 G_0 = - \delta ( x - x' ) \delta ( y - y' ) \delta ( z'' - z' ) \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 10)$$

を満足する関数となるはずである。ただしこの  $G_0 ( x, y, z'' | x', y', z' )$  の意味は、点  $( x', y', z' )$  に単位の大さきの力が作用したときの、点  $( x, y, z'' )$  における応答変位のことであって、いわば動的影響面を与えることになる。

この式( A・10 )は、3重 Fourier 変換を用いて解くことができるが、簡単に記すと以下のようになる。すなわち、 $G_0 ( x, y, z'' | x', y', z' )$  の3重 Fourier 変換を  $\overset{=}{G}_0 ( \xi, \eta, \zeta | x', y', z' )$  として、式( A・10 )の両辺に  $(2\pi)^{-3/2} \exp \{ - ( \xi x + \eta y + \zeta z'' ) \}$  を

乗じて、それぞれ  $x, y, z''$  に関して  $[-\infty, \infty]$  での積分を行なうと、次式をうる。

$$-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \overset{\equiv}{G}_0 + k_T^2 \overset{\equiv}{G}_0 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-i(\xi x' + \eta y' + \zeta z')}$$

したがって、

$$\overset{\equiv}{G}_0(\xi, \eta, \zeta | x', y', z') = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \frac{e^{-i(\xi x' + \eta y' + \zeta z')}}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - k_T^2} \quad \cdots (A \cdot 11)$$

同様に Fourier 逆変換によって、

$$G_0(x, y, z'' | x', y', z') = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta d\zeta \cdot \frac{e^{i\{\xi(x-x') + \eta(y-y') + \zeta(z''-z')\}}}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - k_T^2} \quad \cdots (A \cdot 12)$$

さて式 (A・12) を  $\xi, \eta, \zeta$  について積分する際には、当然留数計算を伴うが、もともと式 (A・10) は波動方程式であって、この解は無限遠に逸散する波動を表わすものでなくてはならないので、 $r \rightarrow \infty$  で  $\partial G_0 / \partial r \rightarrow -ik_T \cdot G_0$  という形をとるはずである。これらの計算の過程を省略して結果<sup>8)</sup>のみを記すと、以下ようになる。

$$G_0(x, y, z'' | x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik_T R}}{R} \quad \cdots \cdots \cdots (A \cdot 13)$$

$$\text{ここに、} R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z''-z')^2 \quad \cdots \cdots \cdots (A \cdot 14)$$

この式 (A・13) は点  $(x', y', z')$  において単位の大きさの加振を与えられた媒体中を球面状の波動が無限遠に逸散することを示している。このような逸散波は、第2章より第5章までと同様に、構造物の振動においては減衰効果を発揮することは言うまでもない。

ところで、式 (A・13) の  $G_0(x, y, z'' | x', y', z')$  は無限媒体中での解であって、半無限媒体中の解を求めないと、式 (A・9) の  $w_0$  と一致しない。そこで半無限媒体中における所期の Green 関数を  $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$  とし、境界面に関して  $G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$  の鏡像点に関する Green 関数を  $G_1(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$  とすると、一般に境界のある場合は

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + G_1(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 15)$$

と置けばよい。ただし、 $\mathbf{r}$  および  $\mathbf{r}'$  はそれぞれ  $\mathbf{r} = \{x, y, z''\}$  ,  $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}$  なる位置ベクトルである。

そこで境界面 ( $z=0$ ) において応力が 0 となるような条件に対して

$$\frac{dG}{dz} = 0 \quad \text{すなわち} \quad G_1 = G_0' \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 16)$$

とすればよいことになる。ただし  $G_0'$  の ' 印は虚像点の座標を用いることを示すものである。そこで図 A・2 を参照して、観測点 ( $x, y, z''$ ) と実点源 ( $x', y', z'$ )、虚点源 ( $x', y', -z'$ ) との空間距離をおのおの  $R, R'$  とすると、結局求める半無限地盤での Green 関数  $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  として、式 (A・13)、式 (A・15) に境界条件式 (A・16) を用いることにより、次式をうる。

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + G_1(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ &= \frac{e^{-ik_T R}}{4\pi R} + \frac{e^{-ik_T R'}}{4\pi R'} \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 17) \end{aligned}$$

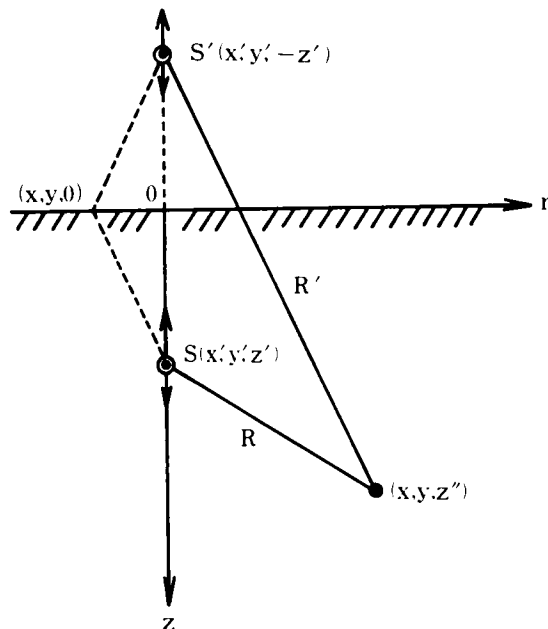


図 A・2 実点源・虚点源の模式図



$$\left. \begin{aligned} \text{ここに, } k_T &= \frac{\omega}{V_T} \quad (\text{波数}) \\ R^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z''-z')^2 \\ R'^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z''+z')^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 17)$$

したがって、式 (A・9) の  $w_0$  として、地表面下  $d$  での点荷重

$$q(\mathbf{r}) = \frac{P}{\mu} \delta(x') \delta(y') \delta(z'-d)$$

に対する一般解はこの式 (A・17) の Green 関数を用いて次のように得られる。

$$\begin{aligned} w_0(x, y, z'') &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') q(\mathbf{r}') dx' dy' dz' \\ &= \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\exp(-ik_T \sqrt{x^2 + y^2 + (z''-d)^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z''-d)^2}} + \frac{\exp(-ik_T \sqrt{x^2 + y^2 + (z''+d)^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z''+d)^2}} \right] \\ &= \frac{P}{\mu} \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\exp(-ik_T \sqrt{r^2 + (z''-d)^2})}{\sqrt{r^2 + (z''-d)^2}} + \frac{\exp(-ik_T \sqrt{r^2 + (z''+d)^2})}{\sqrt{r^2 + (z''+d)^2}} \right] \\ &\dots\dots\dots (\text{A} \cdot 19) \end{aligned}$$

ただし、 $r^2 = x^2 + y^2$  である。ところで式 (A・19) の  $z''$  および  $d$  を式 (A・8) の変換より  $z$  にもどすとともに、式 (A・5) を用いると次式をうる。

$$w(r, z) = \frac{P e^{i\omega t}}{4\pi\mu} \left[ \frac{e^{-ik_T R_d}}{R_d} + \frac{e^{-ik_T R'_d}}{R'_d} \right] \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 20)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに, } R_d &= R_{z'=d} = \sqrt{r^2 + (V_T/V_L)^2 (z-d)^2} \\ R'_d &= R'_{z'=d} = \sqrt{r^2 + (V_T/V_L)^2 (z+d)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 21)$$

さらに式 (A・20) より、鉛直応力  $\sigma_z$  に対応する鉛直ひずみ  $\partial w / \partial z$ 、およびせん断応力に対応するせん断ひずみ (または地盤傾斜角)  $\partial w / \partial r$  はおのおの次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{P e^{i\omega t}}{4\pi\mu} \left( \frac{V_T}{V_L} \right)^2 \left[ e^{-ik_T R} (1 + ik_T R) \frac{(z-d)}{R^3} + e^{-ik_T R'} (1 + ik_T R') \frac{(z+d)}{R'^3} \right] \\ &\dots\dots\dots (\text{A} \cdot 22) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{Pe^{i\omega t}}{4\pi\mu} \cdot r \left[ e^{-ik_T R} \cdot \frac{1+ik_T R}{R^3} + e^{-ik_T R'} \cdot \frac{1+ik_T R'}{R'^3} \right] \quad \cdots \cdots (A \cdot 23)$$

地表面での載荷においては、式 (A・20) において  $z=d=0$  とすればよく、次式のようになる。

$$w(r, 0) = \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot \frac{e^{-ik_T r}}{r} \quad \cdots \cdots (A \cdot 24)$$

ところで、A・1でも触れたように、田治見が導いた半理論式<sup>9)</sup>は

$$w = \frac{(1-\nu)Pe^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot \frac{e^{-i\kappa_1 r}}{r} \quad \cdots \cdots (A \cdot 25)$$

である。ただし  $\nu$  : Poisson 比,  $\mu$  : せん断弾性係数, および  $\kappa_1 = 1.33 \omega/V_T$  である。したがって式 (A・24) と田治見が導いた式 (A・25) とを較べると、全体の係数が  $1-\nu$  倍、振動数が 1.33 倍になって評価されていることが分る。しかしながら、これらの相違は以後の解析上にそれほど重大な差異を与えるものではなく、またわずかな修正により両式は完全に一致するので、両者はほぼ等しいと見なして大過なからう。

そこで地表面下  $z=d$  における点加振に対する、半無限地盤内における変位およびひずみの分布を示したのが、図A・3～図A・8である。

図A・3～図A・6は無次元加振振動数  $k_T d = \omega d/V_T$  の種々の値に対する、無次元鉛直変位分布  $w^* = w_1 + iw_2$  ( $w_1, w_2$  : 実数) を示したものであるが、 $k_T d \leq 1$  では虚部  $w_2$  が振動数の増加とともに徐々に増加しているが、この振動数領域では伝播波動の波長が長いので、その地盤の振動モードは単調な分布を示しており、 $k_T d = 0.01$  のように低振動数においても地盤変位は大きいようである。しかるに  $k_T d \geq 2$  では波長が短くなっていくため、地盤内各点の変位分布の起伏が激しくなり、振動数とともに位相差が広がっていくことが知られる。このように加振振動数の如何によって、地盤内変位分布がかなり異なることが分るが、地表面上の原点 0 より加振点までの深さ ( $z/d = 1$ ) の2倍以上の点 ( $r/d \geq 2$ ) では、一般にその応答振幅は加振振動数に関係なく小さな値であることが分る。

図A・7および図A・8は、無次元振動数  $k_T d = 1$  に対するおのおの直ひずみおよびせん断ひずみの地盤内分布を示したものである。図A・7の直ひずみ  $\partial w/\partial z$  は、加振点を含む鉛直線上の各深さにおいて、非常に大きな値を示しているが、水平方向への距離とともに著しい減

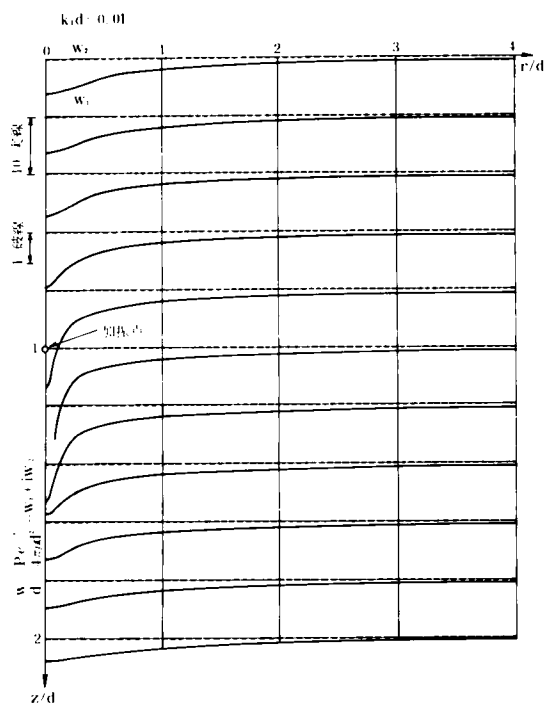


図 A・3 地盤内点加振による鉛直変位分布

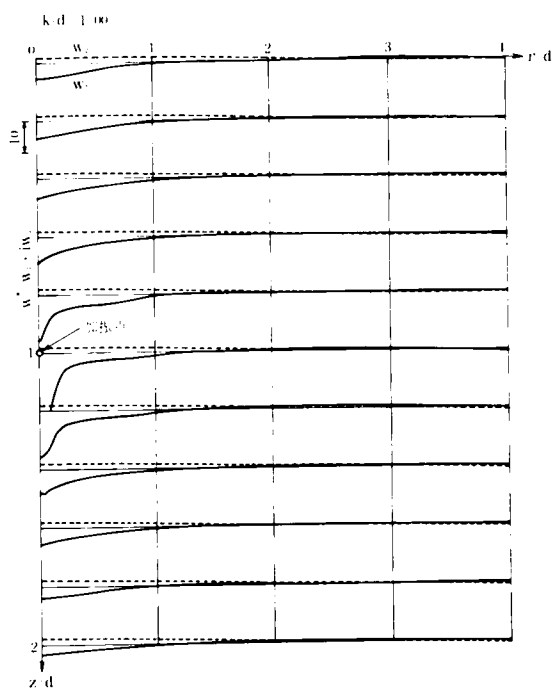


図 A・4 地盤内点加振による鉛直変位分布

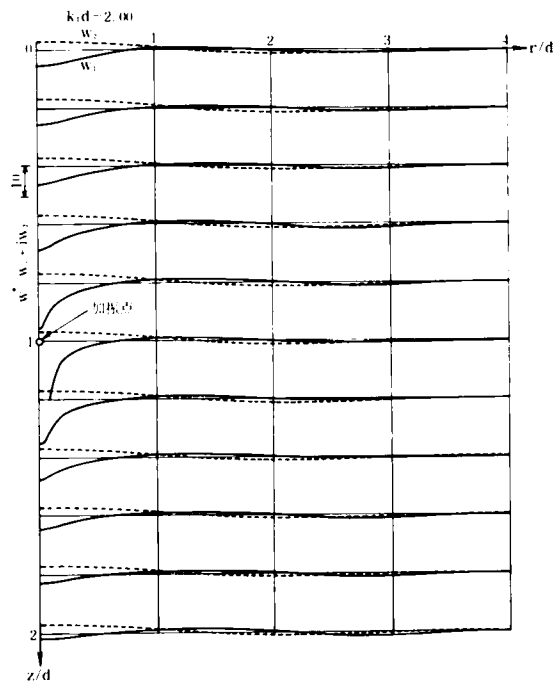


図 A・5 地盤内点加振による鉛直変位分布

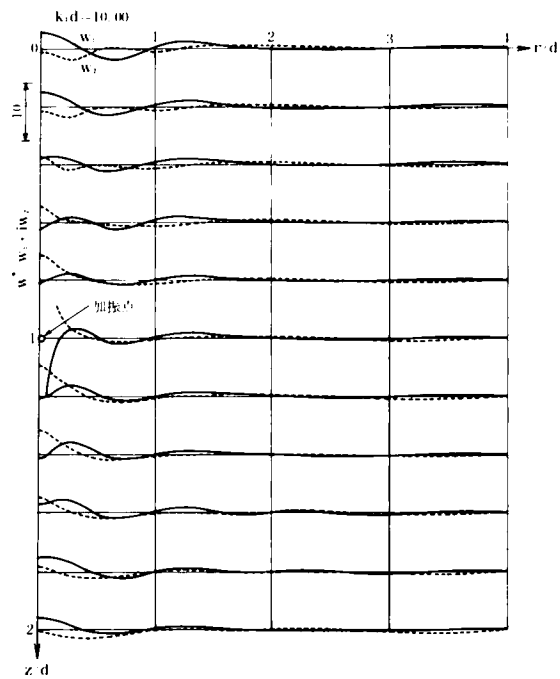


図 A・6 地盤内点加振による鉛直変位分布

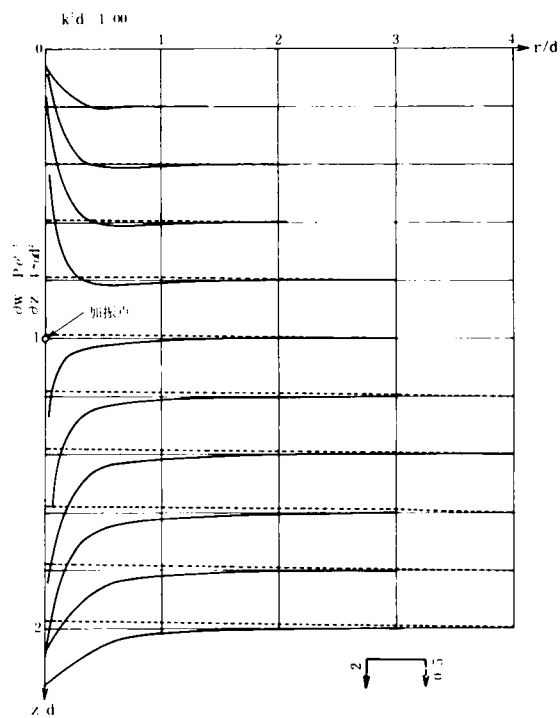


図 A・7 地盤内点加振による鉛直ひずみ分布

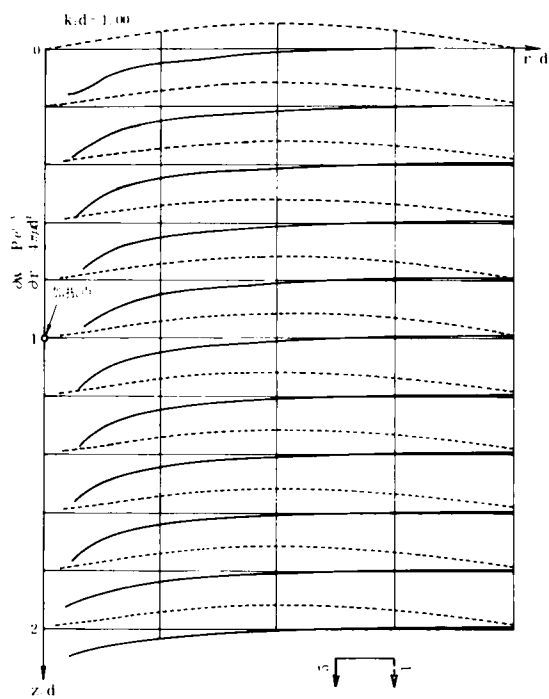
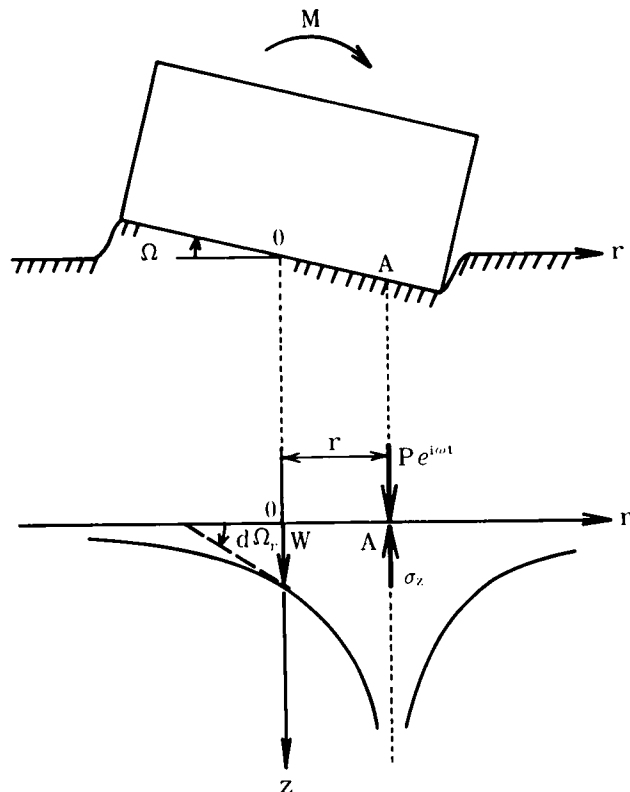


図 A・8 地盤内点加振によるせん断ひずみ分布

少を示す傾向があるようである。一方図A・8のせん断ひずみ  $\partial w / \partial r$  では、加振点を含む鉛直線上で大きな値を示すのは直ひずみと同様であるが、その他の鉛直線上のひずみ分布はほとんど深さに関係なく、同じひずみ分布を示し、そのせん断ひずみの絶対値は水平方向のかなりの距離までは大きな値を示すようである。このように、直ひずみに比べてせん断ひずみの距離減衰の効果はきわめて小さいことが分る。

#### A.2.2 地盤の動揺振動アドミタンス

図A・9の上図のように、構造物が強制回転力  $M$  をその底面0点まわりに受けるとき、地盤との接触底面の各点が点振動源になっていると考えることができる。それゆえ、構造物の回転角  $\Omega$  は底面内各点の振動源によって生ずる地盤内応力波の伝播の影響を総合したものである。この回転角  $\Omega$  を定義する方法には、構造物端点変位の平均法<sup>10)</sup> などがあるが、本研究では各点源によって断面中心点0に生ずる地盤傾斜角  $d\Omega_r$  の、断面全体における総和で表わす田治見の方法<sup>11)</sup> によった。



図A・9 動揺回転角

ところで、図A・9の0点の地盤傾斜角  $d\Omega_r$  は先に得た地中内点加振による場合の式 (A・23) において、 $z=d=0$  とすることにより

$$d\Omega_r = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot \frac{1+ik_T r}{r^2} \cdot e^{-ik_T r} \quad \dots\dots\dots (A \cdot 26)$$

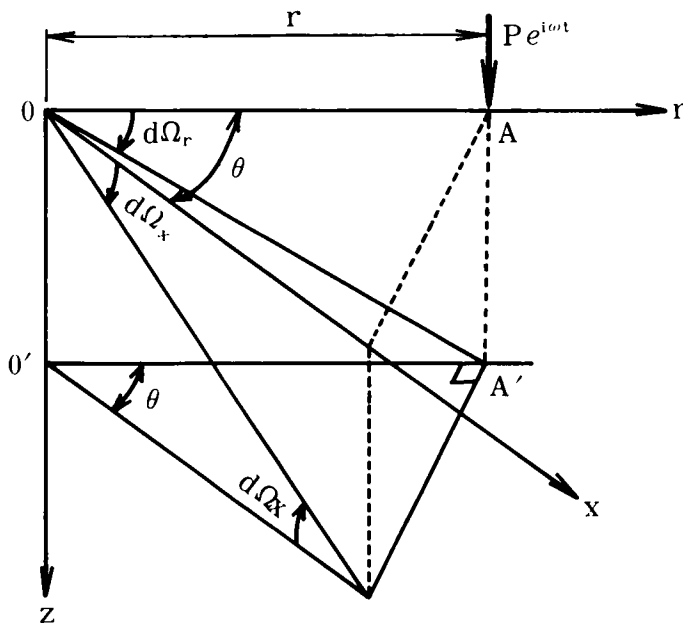
で与えられるが、この  $d\Omega_r$  の評価を行なうためには、点荷重  $Pe^{i\omega t}$  の接触面内における分布、したがってそれに対応する地盤内応力  $\sigma_z$  の分布を知らなければならないことになる。

そこで本研究においても、A.1 で述べたように、Reissner 以来のほとんどの研究者が構造物と地盤との接触面における地盤の動的応力分布を静的な応力分布で代表させてきた方法に従って、鉛直応力  $\sigma_z$  の分布を三角形分布または Boussinesq 分布の2種類について仮定した。

ところで図A・10を参照すると、地表面上の  $\overline{OA}$  方向より水平に  $\theta$  だけ振った方向 ( $x$  方向) における地盤傾斜角  $d\Omega_x$  は、次のような関係式を満たしていることは明らかである。

$$\tan (d\Omega_x) = \cos \theta \cdot \tan (d\Omega_r) \quad \dots\dots\dots (A \cdot 27)$$

しかるに、微小な弾性振動においては、回転角  $d\Omega_r$ 、 $d\Omega_x$  とともに小さな量であると見なされるので、式 (A・26) および式 (A・27) より近似的に次式が成立つとしてよい。

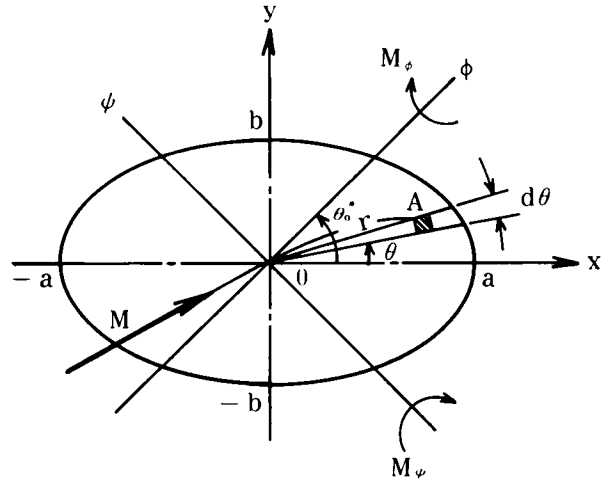


図A・10  $d\Omega_r$  と  $d\Omega_x$  の関係

$$dQ_x = \cos \theta \cdot dQ_r$$

$$= - \frac{P e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \frac{\cos \theta}{r^2} (1 + ik_T r) e^{-ik_T r} \dots\dots\dots (A \cdot 28)$$

さて一般の構造物の断面では、強制回転力の方向が任意の方向であるとき、構造物の動揺振動の方向が入力の方と一致することはまれであろう。例えば図A・11のような楕円断面においては、外力がx軸に対して角 $\theta_0$ の方向に入射したとき、地盤反力の不釣合から、必ずしも応答の方向と入射の方向とは一致しない。すなわち、構造物は新たな方向（x軸とのなす角 $\theta_0^*$ ）に釣合位置を見出すことになる。この釣合の位置というのは、図A・11の断面中心点0における回転角が0になる方向が回転軸（ $\phi$ 軸）と一致し、それと直角方向（ $\psi$ 軸）が新しい応答の方向である、ということで説明されよう。



図A・11 入力方向角 $\theta_0$ と応答方向角 $\theta_0^*$   
(楕円断面)

そこで図A・11のように、強制外力モーメント $M$ の入射方向を $\theta = \theta_0$ 、応答の方向を $\theta = \theta_0^*$ とすると、 $\phi$ 軸まわりおよび $\psi$ 軸まわりの分モーメント、 $M_\phi$  および  $M_\psi$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_\psi &= M \cos(\theta_0^* - \theta_0) \\ M_\phi &= M \sin(\theta_0^* - \theta_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 29)$$

したがって、式(A・29)の分モーメント $M_\phi$ による場合では、接触面内のA点载荷による0点下に生ずる $\phi$ 軸、 $\psi$ 軸まわりの回転角をそれぞれ $dQ_{\phi\phi}$  および  $dQ_{\phi\psi}$  とすると、これらは式(A・28)を利用して次のように得られる。

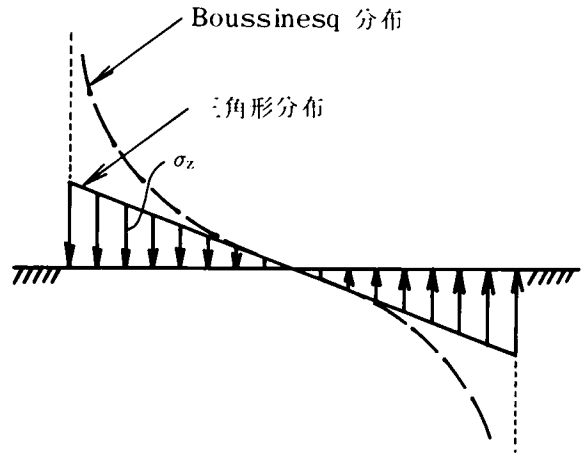
$$dQ_{\phi\phi} = \frac{\sigma_x \cdot r dr d\theta \cdot e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot \frac{1 + ik_T r}{r^2} \sin(\theta_0^* - \theta) \cdot e^{-ik_T r} \dots\dots\dots (A \cdot 30)$$



$$dQ_{\phi\phi} = \frac{\sigma_z \cdot r dr d\theta \cdot e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot \frac{1 + ik_T r}{r^2} \cos(\theta_0^* - \theta) \cdot e^{-ik_T r} \quad \dots\dots\dots (A \cdot 31)$$

ところで、式(A・30)、(A・31)を評価するためには、接触圧(鉛直応力) $\sigma_z$ の分布を知らねばならないが、これの概略を示したのが図A・12である。

ここでは $\sigma_z$ を三角形分布と仮定するとき $\phi$ 軸まわりの分モーメント $M_\phi$ による応力分布 $\sigma_z$ は、 $\phi$ 軸まわりの断面2次モーメントを $I_\phi$ とすると、次式で与えられる。



図A・12 接触圧 $\sigma_z$ の分布

$$\sigma_z = \frac{M_\phi}{I_\phi} r \sin(\theta_0^* - \theta_0), \quad \theta_0^* - \pi \leq \theta \leq \theta_0^* \quad \dots\dots\dots (A \cdot 32)$$

ただし  $I_\phi = \pi ab \left( \frac{a^2}{4} \sin^2 \theta_0^* + \frac{b^2}{4} \cos^2 \theta_0^* \right)$

したがって、この式(A・32)の $\sigma_z$ を式(A・30)、(A・31)に持込んで、全断面について積分したものを、おのおの $Q_{\phi\phi}$ および $Q_{\phi\zeta}$ とすると

$$\begin{aligned} Q_{\phi\phi} &= 2 \int_{\theta_0^* - \pi}^{\theta_0^*} \int_0^R \frac{M_\phi}{I_\phi} r \sin(\theta_0^* - \zeta) \cdot \frac{e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \frac{(1 + ik_T r)}{r^2} \sin(\theta_0^* - \zeta) e^{-ik_T r} r dr d\zeta \\ &= \frac{aM_\phi}{\pi\mu I_\phi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin^2(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) d\zeta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A \cdot 33)$$

となる。同様にして次式をうる。

$$Q_{\phi\zeta} = - \frac{aM_\phi}{\pi\mu I_\phi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) d\zeta \quad \dots\dots\dots (A \cdot 34)$$

ここに、

$$P(k_T R_s) = \frac{k_T R_s}{k_T a} \left[ \frac{2 \sin k_T R_s}{k_T R_s} - \cos k_T R_s - i \left\{ \frac{2(1 - \cos k_T R_s)}{k_T R_s} - \sin k_T R_s \right\} \right],$$

$$k_T R_s = \frac{k_T a}{\sqrt{1 + k_b^2 \sin^2 \zeta}}, \quad k_b = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad (a \geq b > 0)$$

………… (A・35)

一方、図A・11における $\psi$ 軸まわりの回転においては、断面2次モーメントを $I_\psi$ とすると、鉛直応力 $\sigma_z$ の分布は次式のようになる。

$$\sigma_z = \frac{M_\psi}{I_\psi} \cdot r \cos(\theta_0^* - \theta), \quad \theta_0^* - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_0^* + \frac{\pi}{2} \quad \text{………… (A・36)}$$

$$\text{ただし } I_\psi = \pi a b \left( \frac{a^2}{4} \cos^2 \theta_0^* + \frac{b^2}{4} \sin^2 \theta_0^* \right)$$

この $\sigma_z$ による、 $\psi$ 軸まわりと $\phi$ 軸まわりの全回転角をおのおの、 $\mathcal{Q}_{\psi\psi}$ および $\mathcal{Q}_{\phi\phi}$ とすると、同様にして次式が得られる。

$$\mathcal{Q}_{\psi\psi} = \frac{a M_\psi}{\pi \mu I_\psi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin^2(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) d\zeta \quad \text{………… (A・37)}$$

$$\mathcal{Q}_{\phi\phi} = \frac{a M_\phi}{\pi \mu I_\phi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin^2(\zeta - \theta_0^*) \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) d\zeta \quad \cdots \text{(A・38)}$$

$$\text{ここに, } k_T R_c = \frac{k_T a}{\sqrt{1 + k_b^2 \cos^2 \zeta}} \quad \text{………… (A・39)}$$

かくして分モーメント $M_\phi$ 、 $M_\psi$ による $\phi$ 軸・ $\psi$ 軸まわりの回転角が得られたが、これらを総合した $\phi$ 軸・ $\psi$ 軸まわりの全回転角をおのおの、 $\mathcal{Q}_\phi$ および $\mathcal{Q}_\psi$ とすると、次式のようになる。

$$\mathcal{Q}_\phi = \mathcal{Q}_{\phi\phi} - \mathcal{Q}_{\psi\phi} = \frac{a M e^{i\omega t}}{\pi \mu} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \left[ \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \sin(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) \right. \\ \left. - \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\psi} \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) \right] d\zeta \quad \text{………… (A・40)}$$

$$\mathcal{Q}_\psi = \mathcal{Q}_{\psi\psi} + \mathcal{Q}_{\phi\psi} = \frac{a M e^{i\omega t}}{\pi \mu} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \left[ \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\psi} \sin(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) \right. \\ \left. + \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) \right] d\zeta$$

$$+ \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s)] d\zeta \quad \dots\dots\dots (A \cdot 41)$$

さて、先述のように回転軸を与える方向は、式(A・40)の $\phi$ 軸まわりの回転角 $\mathcal{Q}_\phi = 0$ を満足する方向であり、このときの根である $\theta_0^*$ が応答の方向を示すものである。

ところで、 $\mathcal{Q}_\phi = 0$ をそのまま解いて得られる応答方向角 $\theta_0^*$ は、振動中は逸散減衰効果のため上記の $P(k_T R)$ が複素数なので、同様に複素数になる。しかるに通常的地盤と構造物との関係においては、 $a/V_T \ll 1$  (sec) であるから、外力の円振動数 $\omega$ を地震動の卓越振動数くらいいとる場合は、 $k_T a = a\omega/V_T \leq 1$  程度の場合を想定すればよいものと思われる。このような振動数領域では、回転角 $\mathcal{Q}_\phi$ における減衰効果(虚数部)の占める割合はそれほど大きくなく、その実部 $Re[\mathcal{Q}_\phi]$ で支配されると考えても差しつかえないであろう。このようにして、式(A・40)より次式を満たす $\theta_0^*$ が求める応答の方向を与えることになる。

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \left[ \frac{R_s}{a} \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \left\{ \frac{2 \sin k_T R_s}{k_T R_s} - \cos k_T R_s \right\} \right. \\ \left. - \frac{R_c}{a} \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \cos(\zeta - \theta_0^*) \left\{ \frac{2 \sin k_T R_c}{k_T R_c} - \cos k_T R_c \right\} \right] d\zeta = 0 \end{aligned}$$

\dots\dots\dots (A・42)

この式(A・42)を満たす応答の方向 $\theta_0^*$ ( $\phi$ 軸まわり)における、地盤の振動アドミッタンス $A_R$ 、あるいはその逆数である回転ばねの剛性 $K_R$ は、式(A・41)より次式のような解析的表示となる。

$$\begin{aligned} A_R = \frac{1}{K_R} = \frac{\mathcal{Q}_\phi}{M e^{i\omega t}} = \frac{a}{2\mu I_0} \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \left[ \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi^*} \sin(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_c) \right. \\ \left. + \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi^*} \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_T R_s) \right] d\zeta \end{aligned}$$

\dots\dots\dots (A・43)

さらにまた、これの静的な場合は $\omega \rightarrow 0$ とし、このときの $A_R$ 、 $K_R$ をおのおの $\lambda_R$ 、 $k_R$ と記すと、

$$\lambda_R = \frac{1}{k_R} = \frac{1}{2\mu I_0} \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \left[ \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi^*} \sin(\zeta - \theta_0^*) \right]$$

$$+ \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi^*} \cos(\zeta - \theta_0^*)] d\zeta \quad \dots\dots\dots (A \cdot 44)$$

ここに、

$$I_0 = \frac{\pi a^2}{4}, \quad I_\phi^* = \left(\frac{b}{a}\right)^3 (1 + k_b^2 \cos^2 \theta_0^*), \quad I_\phi^* = \left(\frac{b}{a}\right)^3 (1 + k_b^2 \sin^2 \theta_0^*) \quad \dots (A \cdot 45)$$

次に図A・13のような矩形断面の場合について考える。この場合も前記の楕円断面の場合と同様に、接触面での応力 $\sigma_z$ の分布は三角形分布であるとする。したがって応答方向角 $\theta_0^*$ が定まれば、振動アドミタンスおよび回転ばね剛性は楕円断面の場合と同様に、式(A・43)、(A・44)と形式的には同じものを用いて計算される。しかしながら、矩形の場合では、 $\phi$ 軸および $\phi$ 軸まわりの断面2次モーメント $I_\phi$ および $I_\phi$ は

$$\left. \begin{aligned} I_\phi &= \frac{4}{3} ab (a^2 \sin^2 \theta_0^* + b^2 \cos^2 \theta_0^*) \\ I_\phi &= \frac{4}{3} ab (a^2 \cos^2 \theta_0^* + b^2 \sin^2 \theta_0^*) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (A \cdot 46)$$

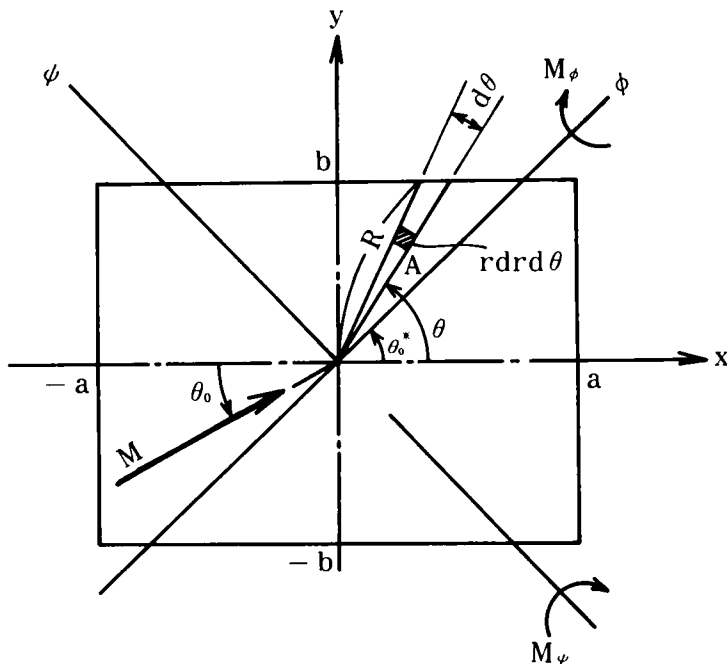


図 A・13 入力方向角 $\theta_0$ と応答方向角 $\theta_0^*$  (矩形断面)

を用いねばならない。

また矩形断面の周上は隅角部が存在するので、応答方向角  $\theta_0^*$  については、一般には次のように 3 つの場合に分けて計算する必要がある。

(i)  $0 \leq \theta_0^* \leq \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \alpha$  のとき：

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \left\{ \int_{\theta_0^* - \pi}^{-\pi + \alpha} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \cdot \operatorname{Re}[P(k_T R_c)] d\zeta \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\pi + \alpha}^{-\alpha} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta + \int_{-\alpha}^{\theta_0^*} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_c)] d\zeta \right\} \\ & - \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \left\{ \int_{\theta_0^* - \pi/2}^{-\alpha} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_c)] d\zeta + \int_{\alpha}^{\theta_0^* + \pi/2} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta \right\} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (\text{A} \cdot 47) \end{aligned}$$

(ii)  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \leq \theta_0^* \leq \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \beta$  のとき：

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \left\{ \int_{\theta_0^* - \pi}^{-\alpha} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_c)] d\zeta + \int_{\alpha}^{\theta_0^*} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta \right\} \\ & - \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \left\{ \int_{\theta_0^* - \pi/2}^{-\alpha} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_c)] d\zeta + \int_{\alpha}^{\theta_0^* + \pi/2} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta \right\} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (\text{A} \cdot 48) \end{aligned}$$

(iii)  $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \leq \theta_0^* \leq \frac{\pi}{2}$  のとき：

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \left\{ \int_{\theta_0^* - \pi}^{-\alpha} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta \right. \\
& \quad \left. + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_c)] d\zeta + \int_{\alpha}^{\theta_0^*} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta \right\} \\
& - \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{I_\phi} \left\{ \int_{\theta_0^* - \pi/2}^{\alpha} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta \right. \\
& \quad \left. + \int_{\alpha}^{\pi/2 + \beta} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \operatorname{Re}[P(k_T R_s)] d\zeta + \int_{\pi/2 + \beta}^{\theta_0^* + \pi/2} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \right. \\
& \quad \left. \cdot \operatorname{Re}[P(k_T R_c)] d\zeta \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 49)
\end{aligned}$$

ただし、 $\operatorname{Re}[P(k_T R)]$  は  $P(k_T R)$  の実部のことであり、この  $P(k_T R)$  は楕円断面の場合の式と同じものを用いればよいが、その argument  $k_T R$  としては、次式のものを用いねばならない。

$$k_T R = \begin{cases} k_T R_c = \frac{k_T a}{|\cos \theta|}, & 0 < \theta < \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \\ k_T R_s = \frac{k_T a}{|\sin \theta|}, & \tan^{-1}\frac{b}{a} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 50)$$

以上が接触面応力  $\sigma_z$  を三角形分布と仮定した場合であるが、一方  $\sigma_z$  を Boussinesq 分布と仮定するときは、田治見<sup>12)</sup>が行なったと同様に、 $\sigma_z$  の円周方向における低減を正弦関数で表示できるものとする

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{3M_\phi}{4a^3 N_\phi} \frac{r \sin(\theta_0^* - \theta)}{\sqrt{R^2 - r^2}}, & \theta_0^* - \pi \leq \theta \leq \theta_0^* \\ \text{ただし} \quad N_\phi &= \int_{\theta_0^* - \pi}^{\theta_0^*} \frac{\sin^2(\theta_0^* - \zeta)}{\sqrt{(1 + k_b^2 \sin^2 \zeta)^3}} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 51)$$

となり、一方  $\phi$  軸まわりの回転に対する応力分布は同様にして

$$\sigma_z = \frac{3M_\phi}{4a^3 N_\phi} \frac{r \cos(\theta_0^* - \theta)}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad \theta_0^* - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_0^* + \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad N_\phi &= \int_{\theta_0^* - \pi/2}^{\theta_0^* + \pi/2} \frac{\cos^2(\theta_0^* - \zeta)}{\sqrt{(1 + k_b^2 \sin^2 \zeta)^3}} d\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 52)$$

と与えられよう。ここに、 $M_\phi$ 、 $M_\psi$  は外力モーメント  $M$  の  $\phi$  軸および  $\psi$  軸まわりの分モーメントであり、式 (A・29) で与えられるものである。そこで図 A・11 のような楕円断面の場合について考えると、応力分布に関係する項は、 $P(k_T R)$  である。 Boussinesq 分布の場合の  $P(k_T R)$  の導出過程を省略して結果のみを記すと次式になる。

$$P(k_T R) = J_0(k_T R) + k_T R \cdot J_1(k_T R) - i \left\{ \mathbf{H}_0(k_T R) + k_T R (\mathbf{H}_1(k_T R) - \frac{2}{\pi}) \right\} \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 53)$$

ただし、 $J_0(\quad)$ 、 $J_1(\quad)$  はそれぞれ 0 次および 1 次の第 1 種 Bessel functions であり、 $\mathbf{H}_0(\quad)$ 、 $\mathbf{H}_1(\quad)$  は 0 次および 1 次の Struve functions <sup>13)</sup> である。

したがって、アドミッタンス  $A_R$  は

$$\begin{aligned} A_R &= \frac{1}{K_R} = \frac{Q_\phi}{M e^{i\omega t}} = \lambda_0 \left\{ \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{N_\phi} \int_{\theta_0^* - \pi/2}^{\theta_0^* + \pi/2} \cos^2(\theta_0^* - \zeta) P(k_T R) d\zeta \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{N_\phi} \int_{\theta_0^* - \pi}^{\theta_0^*} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) P(k_T R) d\zeta \right\} \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 54) \end{aligned}$$

で与えられるが、これらの式中の応答方向角  $\theta_0^*$  は次式を満足する  $\theta_0^*$  の値を用いなければならない。

$$\begin{aligned} &\frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{N_\phi} \int_{\theta_0^* - \pi}^{\theta_0^*} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \{ J_0(k_T R) + k_T R \cdot J_1(k_T R) \} d\zeta \\ &- \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{N_\phi} \int_{\theta_0^* - \pi/2}^{\theta_0^* + \pi/2} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \{ J_0(k_T R) + k_T R \cdot J_1(k_T R) \} d\zeta = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 55)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad k_T R &= \frac{k_T a}{\sqrt{1 + k_b^2 \sin^2 \zeta}}, \quad k_b = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \\ \lambda_0 &= \frac{3}{8\mu a^3} \quad (\text{半径 } a \text{ の円断面の静的アドミッタンス}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 56)$$

同様にして、矩形断面の場合においては、応力分布の式 (A・51)、(A・52) における  $N_\phi$  および  $N_\psi$  の代りに、次式を用いればよい。

$$\begin{aligned}
 N_\phi &= \int_{\theta_0^*-\pi}^{\theta_0^*} \sin^2(\theta_0^*-\zeta) \left(\frac{R}{a}\right)^3 d\zeta = n_a \cos^2 \theta_0^* + n_b \sin^2 \theta_0^* \\
 N_\phi &= \int_{\theta_0^*-\pi/2}^{\theta_0^*+\pi/2} \cos^2(\theta_0^*-\zeta) \left(\frac{R}{a}\right)^3 d\zeta = n_b \cos^2 \theta_0^* + n_a \sin^2 \theta_0^*
 \end{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 &\text{ここに, } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ として} \\
 &n_a = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \ln \left| \tan \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{2b}{a} \ln \left| \tan \frac{\alpha}{2} \right| \\
 &n_b = \frac{b}{a} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{b}{a} \ln \left| \tan \frac{\alpha}{2} \right| - 2 \ln \left| \tan \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right|
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 57)$$

ところで、 $P(k_T R)$  は静的な場合 ( $\omega \rightarrow 0$ ) では 1 であり、argument  $k_T R$  に周波数  $\omega$  を含むので、動的効果を表わす量であるが、 $P(k_T R)$  は形式的には式 (A・53) と同じものを用いればよく、argument  $k_T R$  については式 (A・50) を用いることに留意すればよい。

このようにして、振動アドミッタンス  $A_R$  は

$$\begin{aligned}
 A_R &= \frac{1}{K_R} = \frac{\mathcal{Q}_\psi}{M e^{i\omega t}} = \lambda_0 \left\{ \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{N_\phi} \int_{\theta_0^*-\pi/2}^{\theta_0^*+\pi/2} \cos^2(\theta_0^* - \zeta) P(k_T R) d\zeta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{N_\phi} \int_{\theta_0^*-\pi}^{\theta_0^*} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) P(k_T R) d\zeta \right\} \\
 &\dots\dots\dots (\text{A} \cdot 58)
 \end{aligned}$$

で与えられ、このときの応答方向角  $\theta_0^*$  は次式を満足する値である。

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sin(\theta_0^* - \theta_0)}{N_\phi} \int_{\theta_0^*-\pi}^{\theta_0^*} \sin^2(\theta_0^* - \zeta) \cdot \text{Re}[P(k_T R)] d\zeta \\
 &- \frac{\cos(\theta_0^* - \theta_0)}{N_\phi} \int_{\theta_0^*-\pi/2}^{\theta_0^*+\pi/2} \sin(\theta_0^* - \zeta) \cos(\theta_0^* - \zeta) \cdot \text{Re}[P(k_T R)] d\zeta = 0 \quad \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 59)
 \end{aligned}$$

### A・2・3 任意方向強制力を受ける構造物の動揺振動

以上のようにして、入射方向  $\theta_0$  に対する応答方向  $\theta_0^*$  が定められるとともに、この応答方向における動揺振動に関するアドミッタンス  $A_R$  が得られたので、構造物の  $\theta = \theta_0^*$  方向の運動は容易に記述される。すなわち、図 A・11 あるいは図 A・13 を参照すれば、強制回転力  $M$  に



対する  $\phi$  軸まわりの動揺振動に関して

$$J_{\phi} \frac{d^2 Q_{\phi}}{dt^2} + \frac{Q_{\phi}}{A_R} = M_{\phi} \quad \cdots \cdots \cdots (A \cdot 60)$$

のように書き表わされる。ここに、 $M_{\phi}$  は強制回転力  $M$  の  $\theta = \theta_0^*$  方向成分、すなわち回転軸まわりの分モーメントであって、式 (A・29) で与えられるものであるから、

$$M_{\phi} = M \cos(\theta_0^* - \theta_0) \cdot e^{i\omega t} \quad \cdots \cdots \cdots (A \cdot 61)$$

とおける。したがって、式 (A・60) の定常解  $Q_{\phi}$  は以下のように、容易に得られる。

$$Q_{\phi} = \frac{M \cos(\theta_0^* - \theta_0) \cdot e^{i\omega t}}{\frac{1}{A_R} - J_{\phi} \omega^2} \quad \cdots \cdots \cdots (A \cdot 62)$$

ただし、 $J_{\phi}$  は構造物底面の回転軸まわりの慣性モーメントである。ところで、振動数  $\omega > 0$  では常に逸散減衰効果が存在するため、式 (A・35) あるいは式 (A・53) における  $P(k_T R)$  は一般に複素数であり、振動アドミッタンス  $A_R$  も同様に複素数で表わされることになる。したがって、式 (A・62) の分母は加振動数  $\omega$  に対して、0 となり得ず回転角  $Q_{\phi}$  は有限振幅値にとどまることを示している。

#### A・2・4 数値計算結果とその考察

数値計算においては、外乱の入射方向角およびその応答方向角、振動アドミッタンス、回転ばね剛性および構造物の応答回転角について、無次元振動数を媒介にして、検討を加える。

図 A・14 および図 A・15 は、外乱の入射角  $\theta_0$  と応答方向角  $\theta_0^*$  との関係を無次元振動数  $k_T a = 1$  の場合について図示したものであり、前者が楕円断面の、後者が矩形断面の場合である。また図中実線で示したものが、接触圧を三角形分布と仮定した場合で、点線が Boussinesq 分布を仮定した場合である。ここで言う入射方向角  $\theta_0$  と応答方向角  $\theta_0^*$  は図 A・11 および図 A・13 から分るように、断面の長軸方向とのなす角であるが、三角形分布の場合では楕円・矩形断面とも入射方向  $\theta_0$  がほぼ  $22.5^\circ$  より大きな角になると、応答方向角  $\theta_0^*$  は急速に大きくなり、かつまた扁平な断面の場合ほど応答の方向が短軸方向に傾きがちであることがよく示されている。ところで、Boussinesq 分布を仮定した場合には、断面が楕円と矩形の場合では応答方向角  $\theta_0^*$  に著しい差異があることが分る。すなわち楕円断面の場合では、入射方向角  $\theta_0$  と応答方向角  $\theta_0^*$  とのくい違いはそれほど著しくないが、矩形断面の場合は両者の差は大きく、

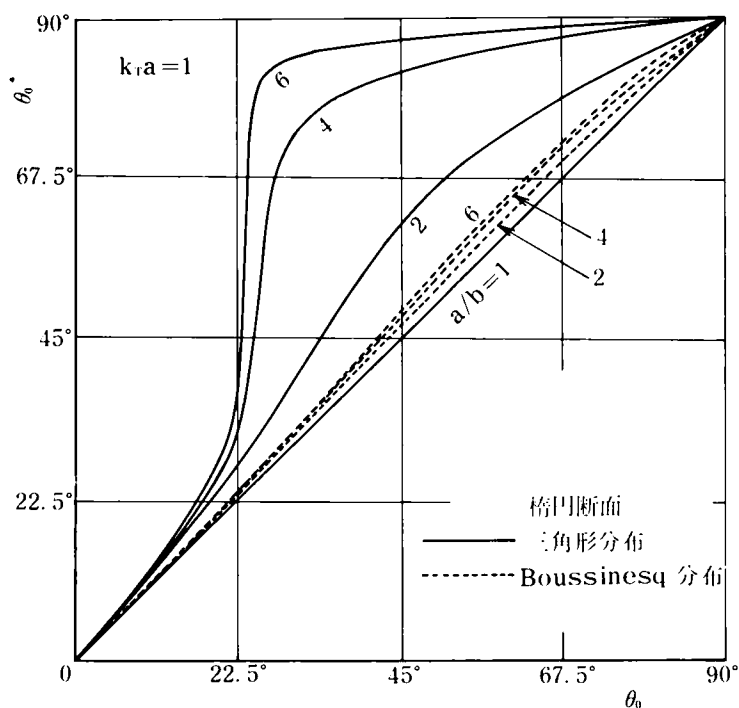


図 A・14 入力方向角  $\theta_0$  と応答方向角  $\theta_0^*$  との関係

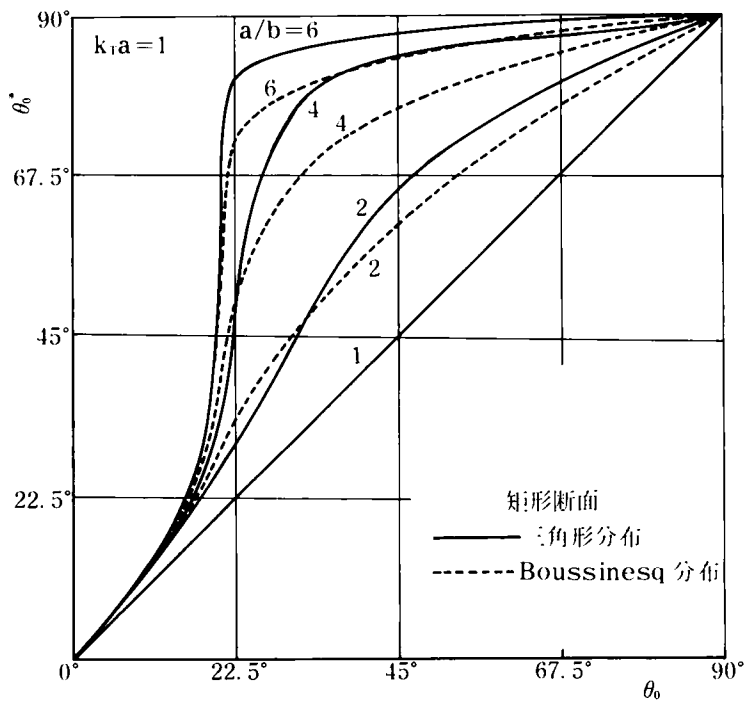
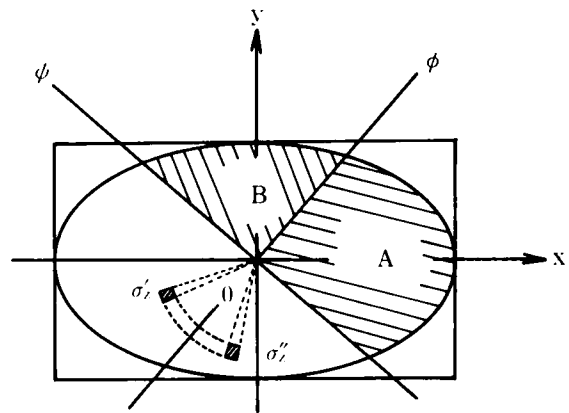


図 A・15 入力方向角  $\theta_0$  と応答方向角  $\theta_0^*$  との関係

むしろこの場合は接触圧を三角形分布と仮定した場合の傾向と類似していると言えよう。このような差異が生じる理由として次のことが考えられる。式(A・51)および(A・52)のような Boussinesq 分布の仮定では、接触面の周上のいたるところで縁圧力が無限大になるため図A・16のような楕円・矩形断面において、例えば $\phi$ 軸まわりの回転における場合では、縁圧力が最大値を示すのは回転軸 $\phi$ よりの最遠点ではなく、 $\phi$ 軸上の点が最大値をとり、 $\phi$ 軸より左右に等しい角度の点の応力 $\sigma'_x$ 、 $\sigma''_x$ は同



図A・16 楕円・矩形断面の反力の比較

等に評価されなくて、 $\sigma''_x > \sigma'_x$  となる。したがって、 $\phi$ 軸の左右の面積 $A$ 、 $B$ に互にかなりの差があるにもかかわらず両者の反力差はそれほどでもなく、 $\theta_0$ と $\theta_0^*$ とはそれほど差は生じないものと言えよう。楕円断面の場合よりも矩形断面の方が、入射角 $\theta_0$ と応答方向角 $\theta_0^*$ とのくい違いが大きいことは、結局矩形断面の場合の隅角部の面積分が $\phi$ 軸の左右の反力差を広げるために生ずる結果であろう。それゆえ、このような応答の方向角の決定における場合は、応力分布の仮定によりその結果の差はきわめて大きいことから、その仮定には慎重でなくてはならないと言えよう。

またこの応答方向角 $\theta_0^*$ の入力振動数に対する安定性を調べたのが、図A・17～図A・19である。前2者はそれぞれ三角形分布に対する楕円・矩形断面の場合であり、後者はBoussinesq分布に対する矩形断面の場合について示している。先述のように、振動数が $k_T a \leq 2$ 程度で見える限り、応答方向角 $\theta_0^*$ は振動数にほとんど依存しなく、ほぼ一定値を示し、断面が扁平なほど短軸方向への接近が早まる傾向は図A・14、A・15のそれと対応していることが分る。このことは加振方向さえ一定であれば構造物の応答方向は、地震動のように複雑なスペクトル構造の入力に対しても安定した方向を示すものと言えよう。さらにこの振動数に対する安定性は入力方向が短軸方向に近づくにつれて高まることが知られる。しかしながら、図A・17、の楕円断面における長短径比 $a/b=6$ および図A・18の矩形断面における長短径比 $a/b=4$ の場合のように $k_T a$ のある値では、応答方向角 $\theta_0^*$ が急激な跳躍を示す場合もあるようであり、入力方向、断面形および入力振動数のある特別な組合せにおいては不安定な現象が生ずる可能性があることを示している。

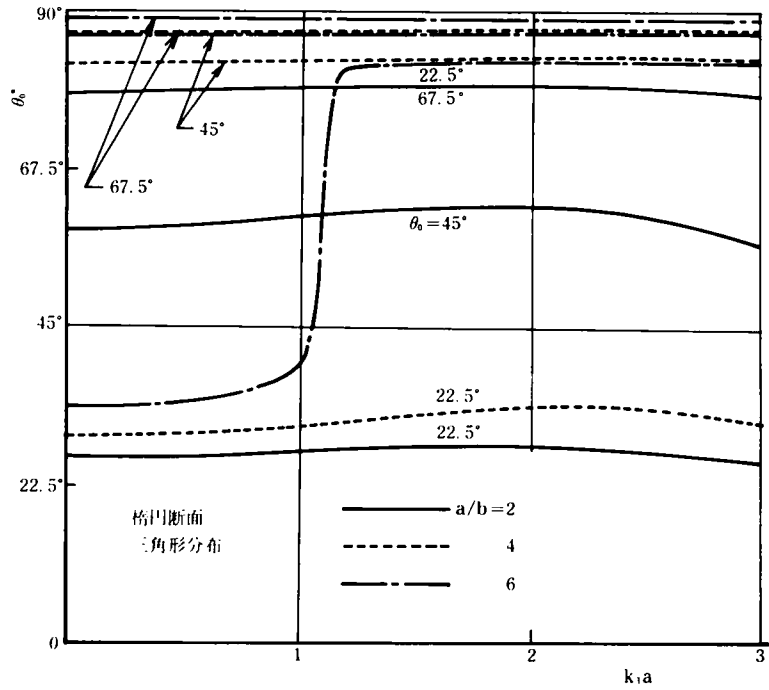


図 A・17 応答方向角の振動数特性

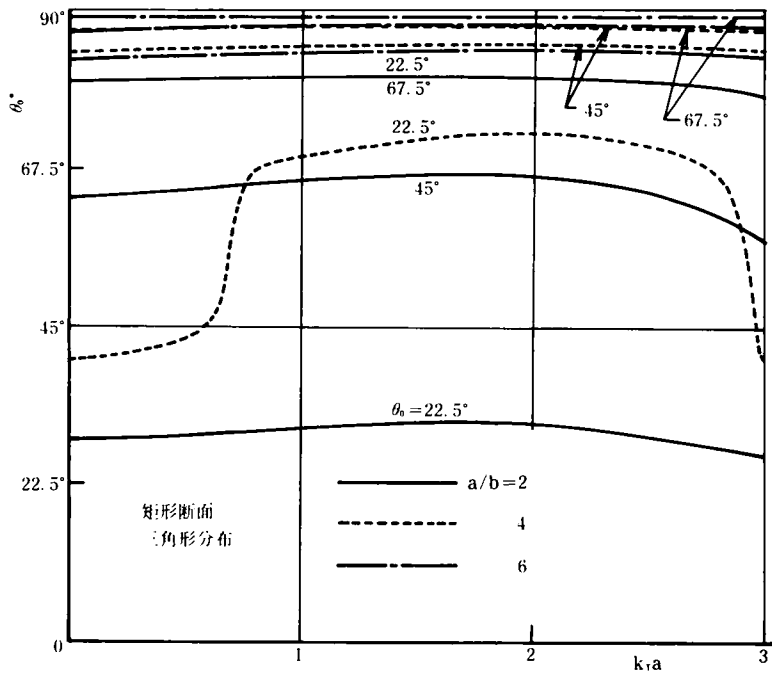


図 A・18 応答方向角の振動数特性

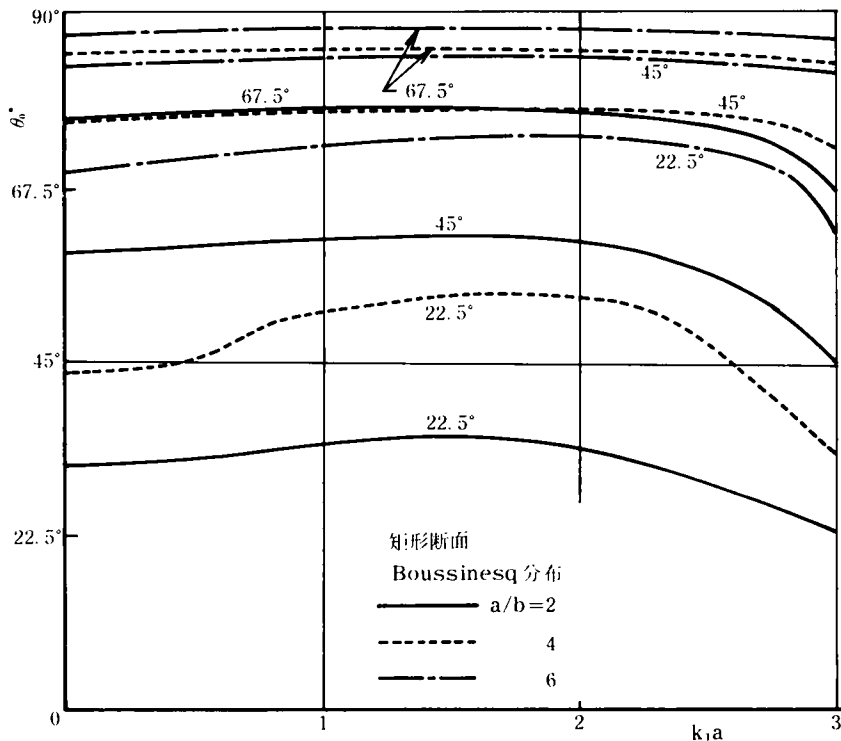


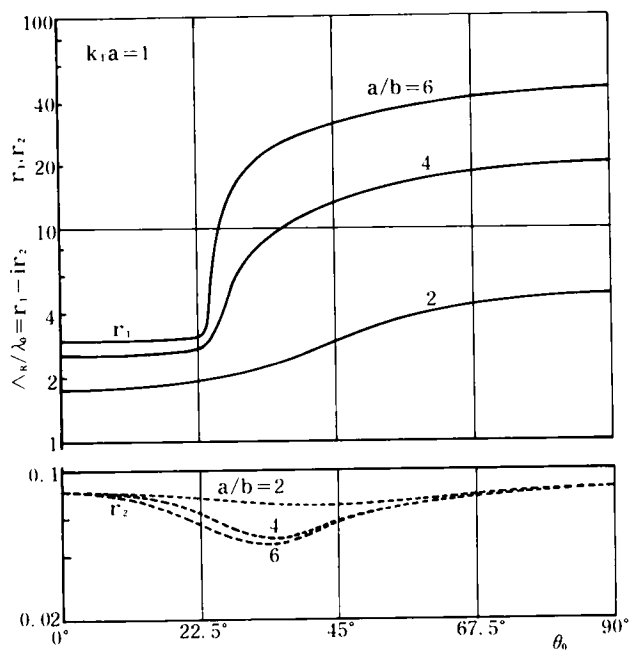
図 A・19 応答方向角の振動数特性

ところでこれより以後の図では、地盤のアドミッタンス  $A_R$  および回転ばね剛性  $K_R$  を無次元表示するため、これら  $A_R$ ,  $K_R$  を半径  $a$  の円断面の場合の静的アドミッタンス ( $\omega \rightarrow 0$ )  $\lambda_0$  および静的回転ばね剛性  $k_0$  でもって除して、

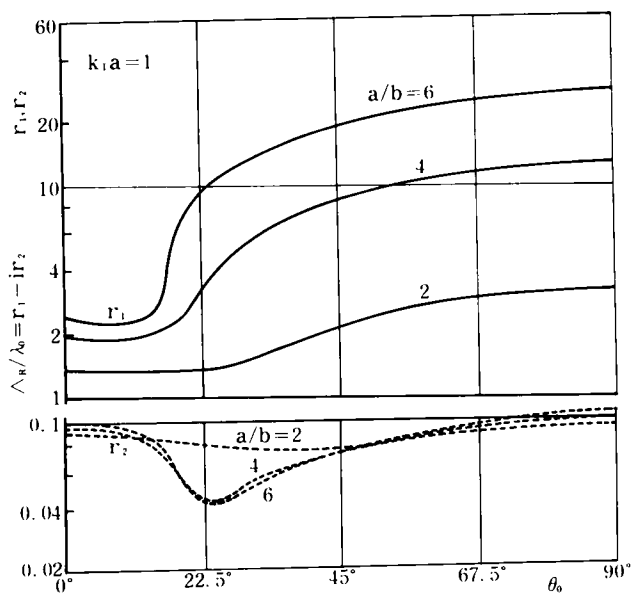
$$\left. \begin{aligned} A_R / \lambda_0 &= r_1 - i r_2 \\ K_R / k_0 &= k_1 + i k_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{A} \cdot 63)$$

としたものについて図示した。ただし、 $r_1$ ,  $r_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  はいずれも実数とする。

さて、図 A・20 (a), (b) はそれぞれ三角形分布の場合の楕円・矩形断面における振動アドミッタンス  $A_R$  の実部・虚部を示したものである。楕円断面の場合のアドミッタンス  $A_R$  の実部  $r_1$  は、入力方向角が  $0 \leq \theta_0 \leq 22.5^\circ$  ではほぼ一定な傾向を示すが、扁平な断面ほどこの  $\theta_0 > 22.5^\circ$  において、急激に増大し以後の増加は緩やかになる。一方虚部  $r_2$  は応答方向角  $\theta_0^*$  が急変する近傍では若干の変動が見られるが、概してその変動は小さく、実部  $r_1$  に比べてその値自身のも小さいことが分る。したがってアドミッタンス  $A_R$  の大勢は実部  $r_1$  によって左右されることになり、長短径比  $a/b$  が大 すなわち扁平な断面の場合ほど、構造物を揺れやすくす



(a) 楕円断面（三角形分布）



(b) 矩形断面（三角形分布）

図 A・20 入射方向角  $\theta_0$  とアドミッタンス  $A_R$  との関係

る傾向があり、入力方向が  $22.5^\circ$  より大きいときは特にその傾向が著しいことが分る。図 A・20 (b) の矩形断面の場合においては、図 A・15 に対応して応答方向角  $\theta_0^*$  が楕円断面の場合より、入力方向角  $\theta_0$  の小さい範囲で急変するため、それに応じてアドミッタンス  $A_R$  の実部  $r_1$  も追隨しているようである。実部  $r_1$  および虚部  $r_2$  は楕円断面の場合とほぼ同様の傾向を示しているが、断面の長短径比  $a/b$  が同一の場合は実部  $r_1$  は一般に楕円断面より小さく、したがってそれだけ地盤の抵抗が強まることを示している。

さて図 A・21 は地盤の回転ばね剛性  $K_R$  の入力方向角  $\theta_0$  に対する変動について図示したものであるが、その内容は明らかに振動アドミッタンス  $A_R$  の逆数である。入力方向角  $\theta_0$  が短軸方向に近づくにつれて実部  $k_1$  は当然のことながら、応答方向角  $\theta_0^*$  の急変するところで激減しているが、虚部  $k_2$  ももはや一定ではなく実部  $k_1$  の変動の傾向と一致して減少する傾向にあり、長短径比  $a/b$  が大きな場合の断面では入力方向が  $\theta_0 > 22.5^\circ$  では虚部  $k_2$  の値は無視しうほどの小さいことが知られる。このように、入力方向が短軸方向に近く、かつ扁平な断面の構造物に対しては、地盤の回転ばね剛性は著しく低下するとともに、その位相  $\tan^{-1}(k_2/k_1)$  は  $\theta_0$  が大きいほど小さいことが知られる。したがって、入力方向が短軸方向に近いほど、逸散による減衰効果が薄れることを意味し、それだけ地盤の応答制御機能は著しく低下すると言えよう。

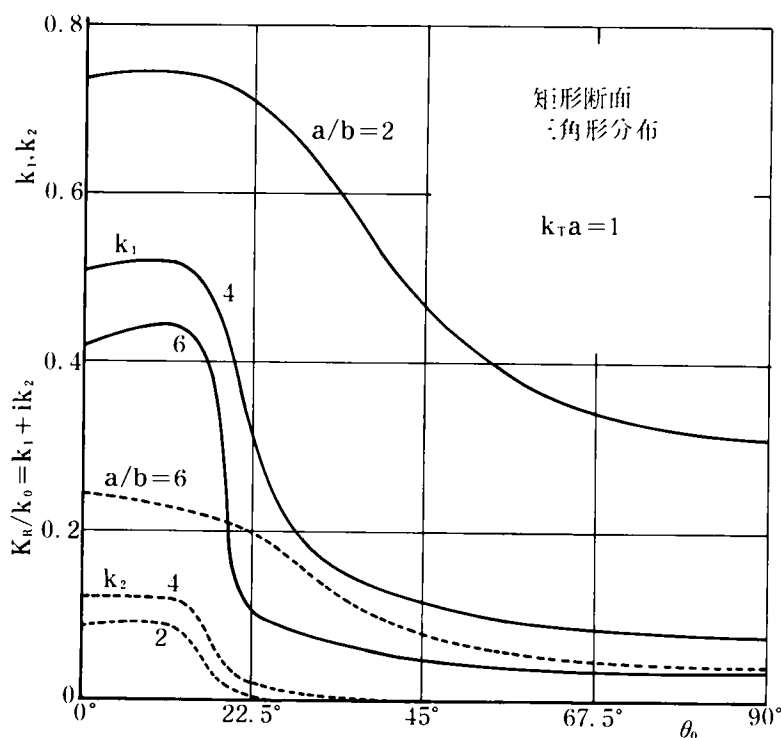


図 A・21 入射方向角  $\theta_0$  と回転ばね剛性  $K_R$  との関係

図A・22および図A・23 はそれぞれ接触圧を三角形分布と仮定したときの  $a/b=2$  の楕円断面の場合について、振動アドミッタンス  $A_R$  および回転ばね剛性  $K_R$  に対する振動数の影響を図示したものである。

図A・22のアドミッタンス  $A_R$  については、実部  $r_1$  は振動数  $k_T a$  とともに若干増加するが、このような  $k_T a \leq 2$  の範囲ではその変動は顕著ではない。一方虚部  $r_2$  はその値は実部  $r_1$  に比べて小さく、応答方向角  $\theta_0$  の相違による  $r_2$  の差は小さいが、 $k_T a$  の増大とともに加速度的に増大することを示している。このようにアドミッタンス  $A_R$  は、その実部  $r_1$  に大きく依存しており、したがって短軸方向に近い入力を受けるときは  $A_R$  は増大し、応答を増大させる働きをする。しかるに図A・23のばね剛性  $K_R$  について見ると、その実部  $k_1$  は当然ながら、入力が短軸方向に近いほど小さく、振動数  $k_T a$  に対しても減少気味である。一方虚部  $k_2$  は、 $r_2$  と同様に振動数  $k_T a$  とともに急速に増大し、その傾向は入力の方向が長軸方向に近いほど著しいことを知る。したがって加振方向が長軸方向に近いほど回転ばね剛性を高めるため共振振動数は増大し、かつ逸散減衰効果も増大さ

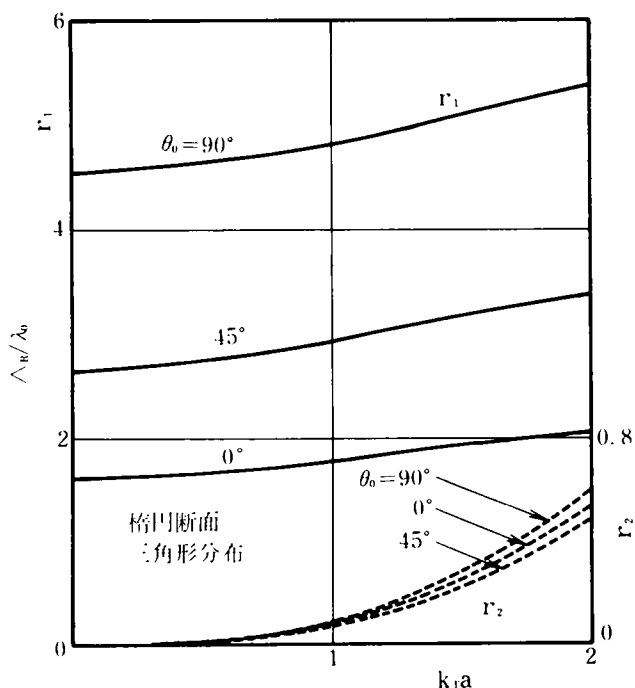


図 A・22 アドミッタンスの振動数特性

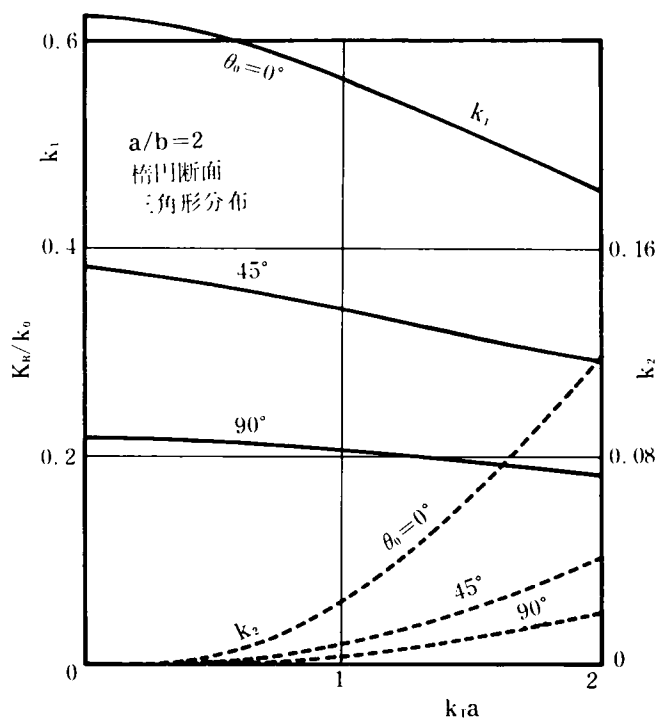


図 A・23 回転ばね剛性の振動数特性



せる効果が生じることがわかる。また回転ばね剛性  $K_R$  の絶対値としては、振動数  $k_T a$  に対して減少することなくほぼ一定値となるであろうことを予想させる。

次に構造物の断面変化とアドミッタンスとの関係を示したのが、図 A・24 である。長軸方向 ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) に加振される限り、アドミッタンス  $A_R$  の実部  $r_1$  は断面の偏平さにほとんど依存せず、かつ楕円・矩形断面の両者による差は小さいが、加振方向が短軸方向へ近づくにつれて実部  $r_1$  は断面の偏平さとともに急速に増大し、構造物が揺れやすくなることを示しており、この傾向は矩形断面より楕円断面の方が著しい。この矩形・楕円断面における差は主として回転軸まわりの断面 2 次モーメントの

大小に起因するものであろう。一方虚部  $r_2$  の値自身は小さいが、逆に楕円断面の場合の方が矩形のそれよりも若干大きく、長短径比  $a/b$  の大小や加振方向角にはあまり影響を受けずに、ほぼ一定の値となるようである。したがって実部  $r_1$  の傾向と比較すると偏平な断面ほど、虚部数  $r_2$  の影響は小さく評価されるといえる。この  $A_R$  の逆数である回転ばね剛性  $K_R$  の断面変化に対する影響を楕円断面について図示したのが、図 A・25 である。この図より回転ばね剛性の実部  $k_1$ 、虚部  $k_2$  とともに断面が偏平になるにつれて同じ傾向で減少し、特に長短径比が  $1 \leq a/b < 3$  の間ではその低下は急激である。また加振方向が長軸方向 ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) に近いほど実部  $k_1$  および  $k_2$  は大きく、したがって式 (A・62) よりも分るようにそれだけ共振点の位置を高振動数側へずらせ、かつ逸散減衰効果も同様に大きく構造物に作用し、加振が短軸方向に近いほど、応答を増幅せしめる結果になることを示している。

以上のように入力方向に対する応答方向角、振動アドミッタンス、回転ばね剛性などの特性

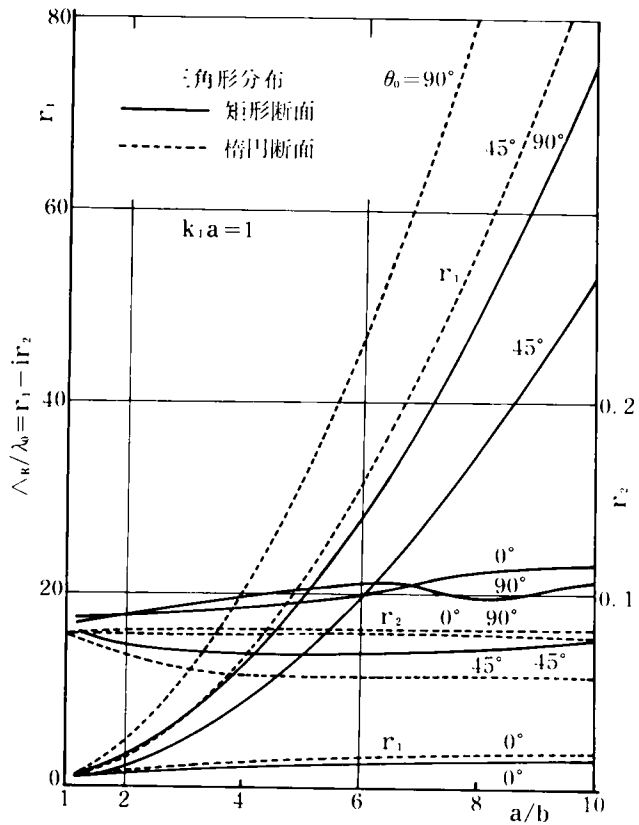


図 A・24 断面変化に対する振動アドミッタンス

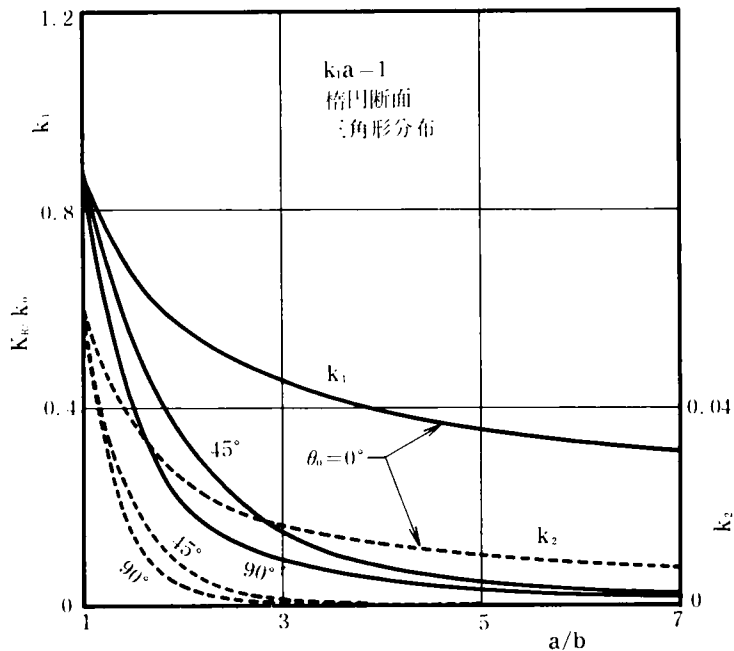


図 A・25 断面変化に対する回転ばね剛性

が種々のパラメータについて検討されているので、式 (A・62) の応答角変位  $\mathcal{Q}_\phi$  は容易に計算される。

さらに図 A・26 および図 A・27 は、いずれも接触圧として三角形分布を仮定したときの応答角変位に関する計算例であって、前者は楕円断面 ( $a/b = 2$ ) について、後者は矩形断面 ( $a/b = 2$ ) について図示している。これらの図より、応答角変位は地盤のアドミッタンスあるいは回転ばね剛性の特性をよく反映しており、長軸方向に加振されるほど、共振点の位置は高振動数領域へ移行し、かつその共振振幅は減衰効果の増加のため減少してくることをよく示している。このように、地表面上の構造物においては長・短径の異なる断面の構造物は、短軸方向に揺れやすい傾向があり、かつその場合の応答変位はきわめて大きくなる可能性があるもので、実地震動の卓越振動数との兼ね合いで、設計上に十分の対策を講じなければならないものといえよう。

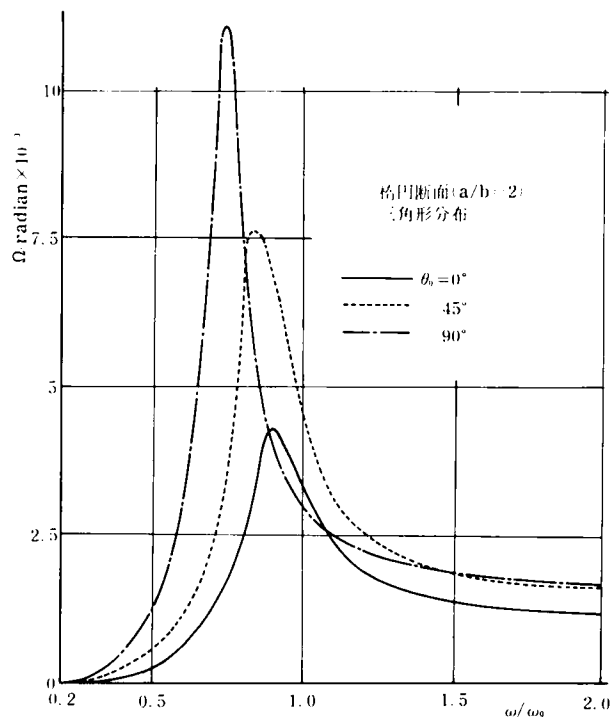


図 A・26 回転角の理論共振曲線

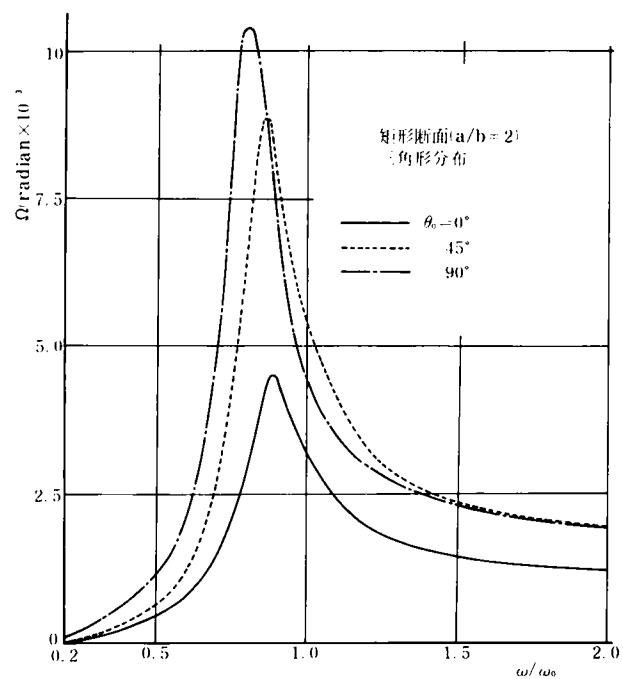


図 A・27 回転角の理論共振曲線

### A.3 模型剛構造物の動揺振動実験

実地盤は、弾性的のみならず当然塑性的な性質も有するが、その地盤上に建つ構造物の規模で考えると、動的な微小変位の範囲では弾性論で説明のつく場合も少なくない。このようなことが実地盤上における実験では、構造物のモデルをあまりに小さく取りすぎると、もはや実構造物における動的挙動を再現できなくなる恐れもある。土木・建築構造物のように、一般には規模の大きな建造物にあっては、多くの場合その構成材料に関する限り、小型模型実験の結果より相似律を介して、実構造物についての推論がなされうるが、地盤のようにその取扱う規模により動特性が異なるようなものには模型と実物とを結びつける相似律が成立たなくなる。それゆえ、模型構造物はできるだけ大きく実物に近いほうが望ましいが、小研究単位においては、遂行上および経費等の点からそれが困難であり、通常は小型・中型模型で実施されることが多い。

一方、地盤を理論上で仮定している半無限弾性地盤に近づけるため、微小変形の範囲ならば線形挙動を示す材料で模型地盤を作成し、相似実験を行なうことは理論の妥当性を確かめる上で必要であろう。そこで問題となるのは、模型地盤における有限領域を、いかに半無限領域に近似するかということであるが、ここには若干の工学的判断が必要とされよう。

#### A.3.1 実地盤上の振動実験と結果の考察

模型本体は図A・28に示すように、外径508 mm、厚さ6.4 mm、高さ1000 mmの鋼管で作られ、加振時の変形をなるべく生ぜしめないように鋼鉄製の上蓋および下蓋を上下に取り付けたので、本実験の目的から十分剛体と見なされるものである。この剛構造物の上蓋の中心部に最大起振力40 kg（このときの回転振動数約30 Hz）の偏心質量回転式の小型起振器を設置し、これにフレキシブルシャフトを通して外部駆動モーターよりの回転力を与えると、構造物頂部に調和水平力を発生するので、これを構造物の動揺振動を与える回転力とした。このとき、応答方向の計測のため、上蓋の断面主軸上端点におおの4個の加速度計（測定許容2G）を、主軸方向に向けて接着した。一方下蓋を補強するために、さらにもう1枚の鋼鉄板（厚さ約15 mm）を用いたが、この補強板を円型（直径500 mm）、矩形（一辺500 mm）および楕円形（長径750 mm、短径375 mm）に切さくし、土圧計を放射状に10数個配置できるように加工した。この構造物模型を支持する地盤は、非常に堅い洪積層の一部を面積2 m×4 m、深さ約60 cmほどを取去ったところに、砂を埋めもどしたものである。

一方計測については、まず起振器の回転数を測定するためには、機械式回転計を外部駆動モ

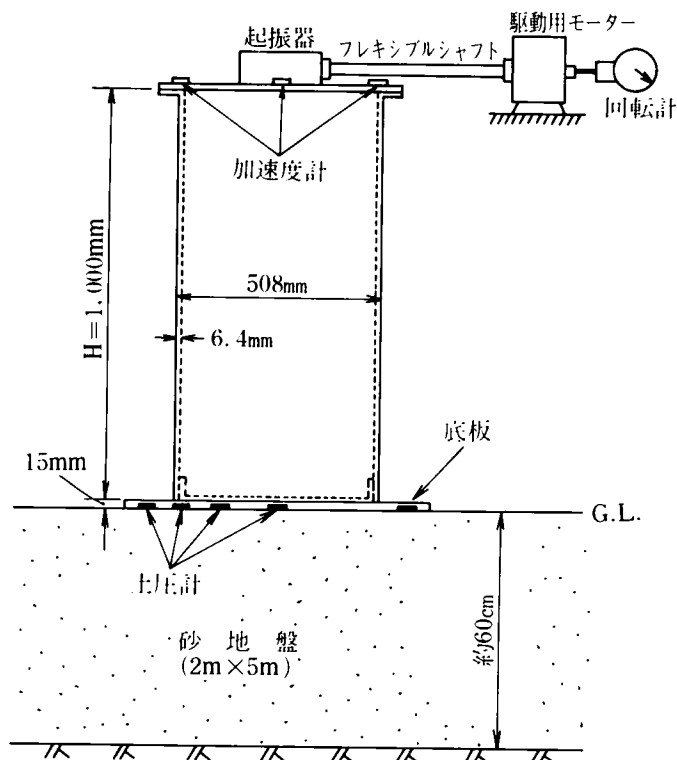


図 A・28 実地盤上振動実験の概略図

ータ後部の回転軸へ手で圧着することによって示指目盛を直読した。また加振度計および土圧計より得られる電気的変動量は途中増幅装置を通して、回転計を読むたびにペンレコーダあるいはデータレコーダに記録させた。図 A・29 のように構造物頂部に配置された 4 個の加速度計より得られた加速度記録はほとんど正弦波と見なされるものが多かったため、これを直接回転円振動数の 2 乗で除して、水平変位とみなした。このようにして換算された変位で、互に直交する方向  $X, Y$  における変位をそれぞれ  $U, V$  とし、さらに  $X, Y$  軸まわりの回転角の成分を

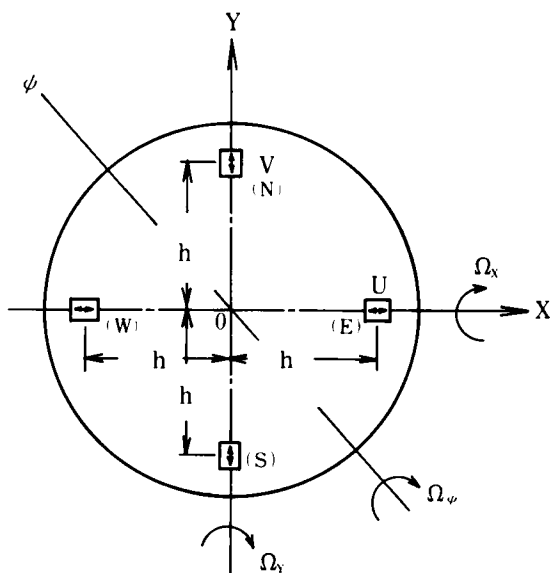


図 A・29 加速度計配置図

$\varrho_X, \varrho_Y$  とすると,

$$\varrho_\phi = \tan^{-1} \left( \sqrt{\tan^2 \varrho_X + \tan^2 \varrho_Y} \right) \quad \cdots \cdots \cdots (A \cdot 65)$$

が成り立つ。しかるに  $\varrho_X, \varrho_Y$  は小さな量であるから,  $\varrho_\phi$  は次式で近似しうる。

$$\varrho_\phi \sim \tan^{-1} \sqrt{\varrho_X^2 + \varrho_Y^2} \quad \cdots \cdots \cdots (A \cdot 66)$$

ところで,

$$\varrho_X = \frac{U}{\sqrt{H^2 + h^2}}, \quad \varrho_Y = \frac{V}{\sqrt{H^2 + h^2}} \quad \cdots \cdots \cdots (A \cdot 67)$$

であるから, 応答方向角  $\theta_0^*$  は次式より算出される。

$$\theta_0^* = \frac{\tan \varrho_Y}{\tan \varrho_X} \sim \frac{\varrho_Y}{\varrho_X} \quad \cdots \cdots \cdots (A \cdot 68)$$

ここに,  $H$ : 模型の高さ,  $h$ : 加速度計中心と上蓋中心との距離。

図A・30および図A・31は正方形断面の  $x$  軸方向 ( $\theta_0 = 0$ ) の加振による動的接触圧  $\sigma_z$  の分布の1例を示したものである。図A・30は縁接触圧と中間接触圧の動的分布を示したもので、この場合回転軸は必ずしも図中の  $Y$  軸ではなく左方にずれているものと思われるが、ここでは中心接触圧は0になるとして、各振動数における面内接触圧を結んで  $\sigma_z$  の分布図を作製した。これによると起振器回転数  $f$  が  $f \leq 700 \text{ r.p.m.}$  では中間点  $NE2$  の接触圧の方が外縁部  $ENE1$  の接触圧より大きくでており、このことは外縁部の土が加振中に緩んできていたにもかかわらず、低振動数では起振力が小さいため、外縁部の土圧計を地盤におしつけるに至らないためと思われる。しかるに  $f = 750 \sim 800 \text{ r.p.m.}$  の共振点では角振幅も増大するため外縁部の接触圧は大きくなり、ほぼ三角形分布に近い形をしているが、この分布形は高振動数においても持続されていることが分る。一方、図A・31も同様に主軸方向 ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) に振動している場合であるが、このとき接触圧  $\sigma_z$  の対角線上での動的分布を図示したものである。隅角部  $NE1$  の接触圧は、ほぼ振動数に比例的に減少していることが知られる。この場合接触圧の  $\sigma_z$  は、低振動数では Boussinesq 分布に近いが、高振動になるにつれて三角形分布に接近していくことが分る。このように低振動数で縁接触圧が大きな値を示すことは、図A・30の傾向とは矛盾しており、実際上の接触圧  $\sigma_z$  は単純な分布形では説明され得ない場合もありうることを示しているが、おおむね  $\sigma_z$  は三角形分布をしていると言えよう。

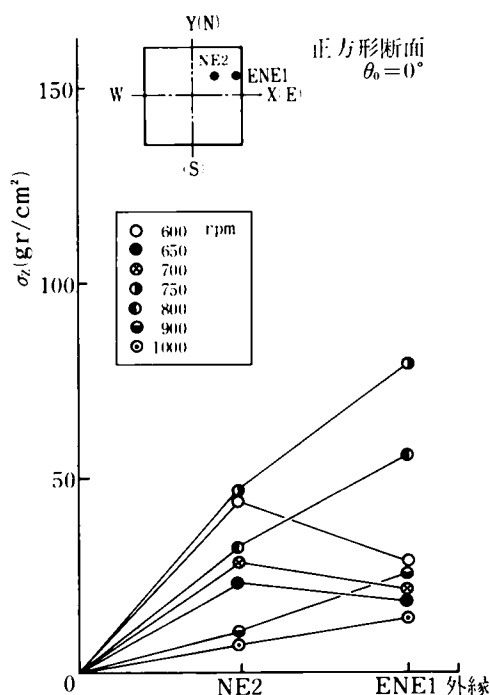


図 A・30 接触圧分布

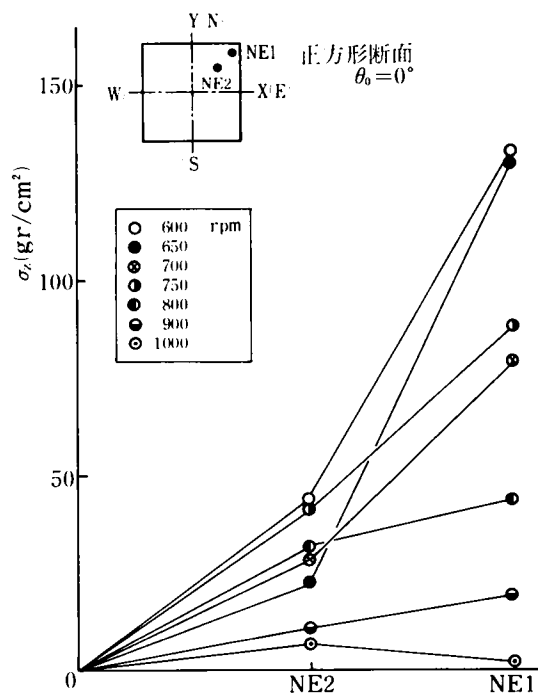


図 A・31 接触圧分布

さて、図 A・32 はペンレコーダ上の加速度記録より視読した測定値より算出された楕円断面 ( $a/b = 2$ ) の場合についての応答方向角  $\theta_0^*$  を示したものである。入力方向角が  $\theta_0 = 22.5^\circ$  の場合は、応答方向角  $\theta_0^*$  が  $\theta_0^* < \theta_0$  となり、長短径比  $a/b = 2$  の場合の理論曲線に比べると若干小さく、 $\theta_0 = 45^\circ$  の入力に対しては応答方向角  $\theta_0^*$  はより短軸に近づくことが分る。このような偏平な断面においては、入力が長軸に近い方角へ入射するときは、接触面圧力がその曲率大なる縁部に集中し、動的安定状態が固定しないために、応答方向角  $\theta_0^*$  が不安定になるが、一方  $\theta_0 \geq 45^\circ$  の入力においては応答は急速に短軸方向に近づき  $\theta_0^*$  は安定するであろうと推察される。またこの図では各加振方向角  $\theta_0$  における、共振振動数 (図中  $\omega \cong \omega_s$ ) およびそれより低い振動数 (図中  $\omega < \omega_s$ ) での応答方向角  $\theta_0^*$  を図示したものであるのに対し、理論曲線は一定振動数に対するものであるから、本来は内容は相異なるものであるが、共振時の  $\theta_0^*$  の方が小さく算出されるようである。

図 A・33 は長短径比  $a/b = 2$  の楕円断面の場合における回転角  $\varphi$  の実験共振曲線を図示したものである。短軸方向に加振されるときは共振振幅はきわめて大きく、加振方向が長軸方向に近づくにつれてその振幅は減少するとともに、共振点の位置が高振動数域へ移行しており、図 A・26 の理論曲線の傾向と比較的よく対応していると言えよう。長・短軸方向 ( $\theta_0 = 0^\circ$  お

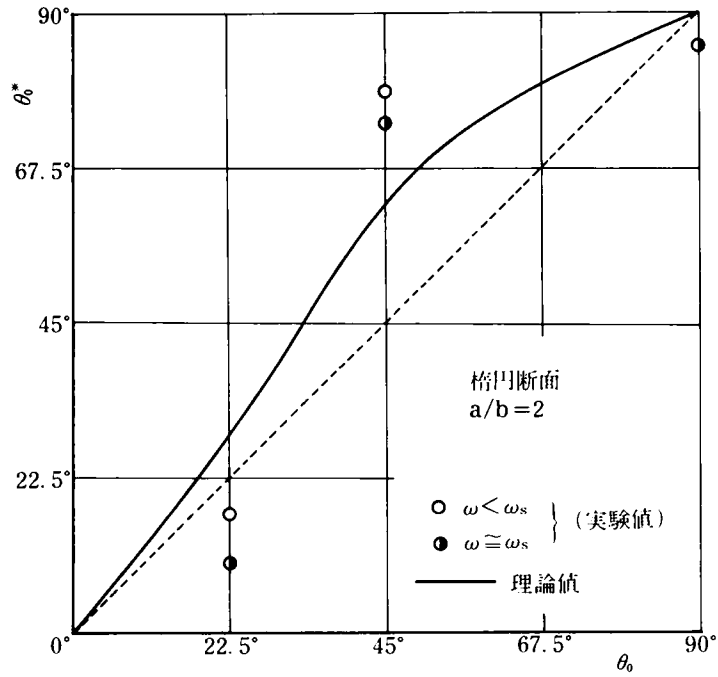


図 A・32 野外実験結果と理論解との対照

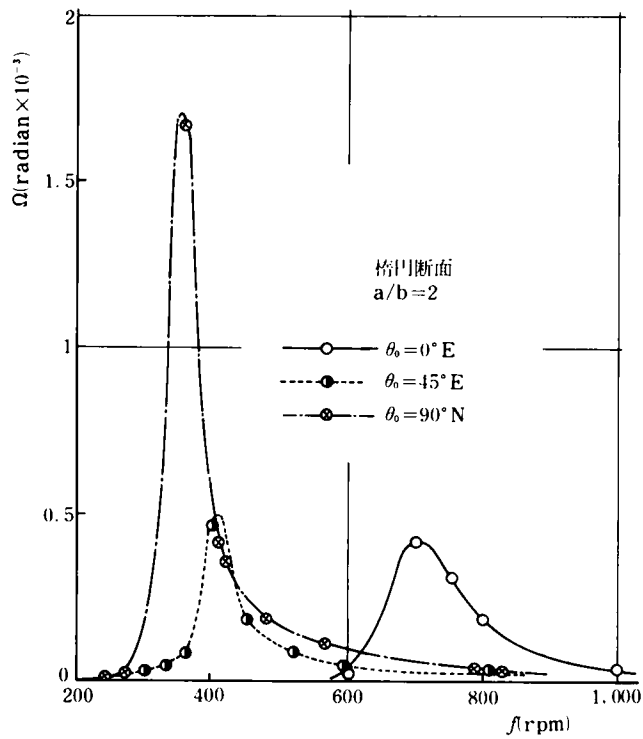


図 A・33 回転角の実験共振曲線



よび  $90^\circ$ ) の加振に対応する共振点相互の間は、理論曲線の場合よりもやや離れているようであるが、 $\theta_0 = 45^\circ$  方向の加振に対する共振点の位置が  $\theta_0 = 90^\circ$  方向の場合の共振点に接近しているのは、図 A・32 の応答方向角の傾向とよく対応していることが分る。

以上は主として接触面が楕円断面の剛構造物の周波数応答についての検討ではあるが、外力が任意方向へ入射する際は応答方向は、理論値よりも、さらに短軸方向に接近しがちであると言えよう。

### A・3・2 模型地盤上の振動実験と結果の考察

図 A・34 のように  $50\text{ cm} \times 60\text{ cm} \times 80\text{ cm}$  の木製槽中に模型地盤を作製し、この表面に試作した小型の回転動発生装置を載せ、回転数および入力方向を変化させることにより実験を行なった。

まず模型地盤については、原地盤が単位体積重量  $\gamma = 2.0\text{ t/m}^3$ 、横波伝播速度  $V_T = 400\text{ m/Sec}$  であるとして、実験中に測定の可能性を考慮した無次元振動数に関する相似則を満たすのは、模型地盤の単位体積重量  $\gamma = 1.2 \sim 1.25\text{ t/m}^3$ 、横波伝播速度  $V_T = 4\text{ m/Sec}$  前後ということになる。

そこで模型地盤の材料として手軽に入手でき、横波伝播速度をある程度自由に变化しうるものとして、市販の寒天を用いた。この寒天について静的載荷試験を行なった結果、若干の履歴特性があるが、ほとんど線形材料と見なして差しつかえないことが分った。種々の濃度による平均的なヤング係数は表 A・1 の値となった。

さらにまた、起振器としては、市販の超小型モータで図 A・34 の略図のように水平に対向する偏心質量部に互に位相が  $180^\circ$  異なる上下動を発生せしめ、したがってこの起振器は中心

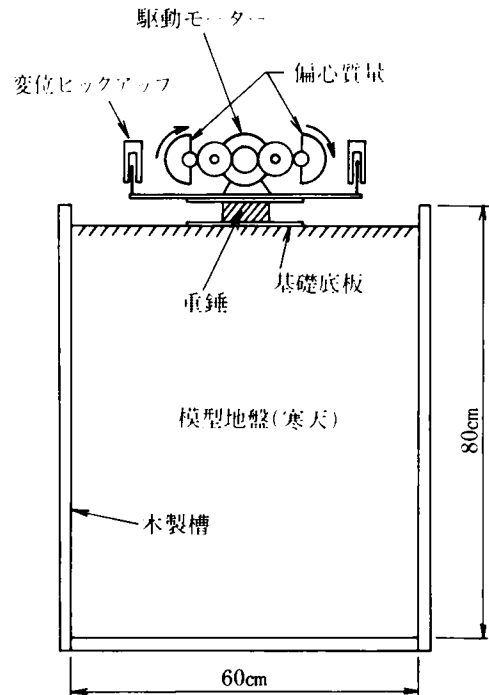


図 A・34 模型地盤上振動実験の概略図

表 A・1 寒天のヤング係数

寒天濃度 (%)	1.5	2.0	2.5
$E\text{ (kg/cm}^2\text{)}$	230	400	520

点まわりに偶力すなわち回転動を発生することになり、その性能を2種の偏心質量の場合について図A・35に示している。このとき基礎底板の形状は図A・36に示すような断面積一定のものを数種、アルミニウム材を用いて作製した。

測定に当っては回転動の鉛直変位を拡大して、電氣的に取り出すために、起振器本体より水平に互に直交する軸上に計4個の非接触型変位ピックアップを設置した。一方起振器の動力は直流発生装置により、回転数を制御するのは可変抵抗器によった。これらの電氣的変換量を増幅器を通してペンレコーダに記録させた。

さて種々の断面および加振方向の変更は、起振器の構造より比較的容易に行なえるので、円・楕円・矩形・正方形の4種の断面形についての動揺振動実験を行なったが、応答の方向性に関して検討を行なうため、上記断面形のうち後3者について整理した。すなわち、図A・37～図A・39は楕円断面、図A・40～図A・42は長方形断面および図A・43～図A・45は正方形断面の場合について、実験結果を整理したものである。

図A・37(a)および(b)は、楕円断面の場合における応答方向角 $\theta_0^*$ が、加振振動数によっていかに影響を受けるかを図示したものであるが、記録紙上より目測で読み取った値はかなりのばらつきを示しており、このままで個々のデータの値

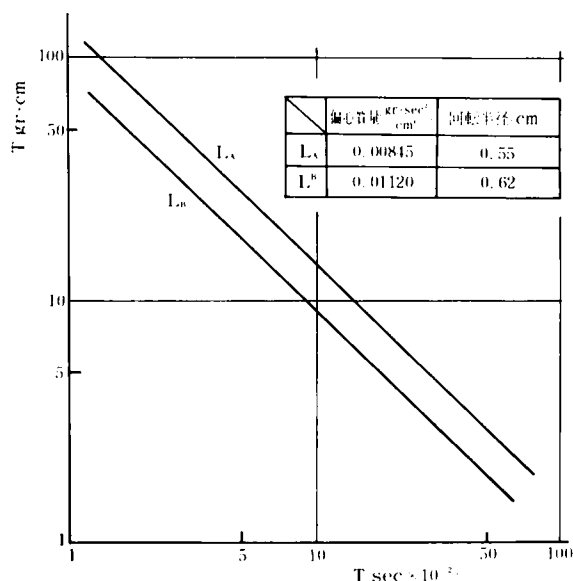


図 A・35 試作小型起振器の性能

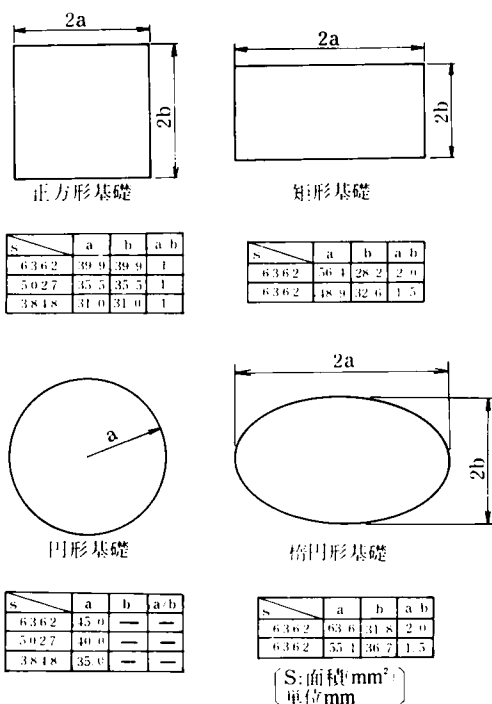
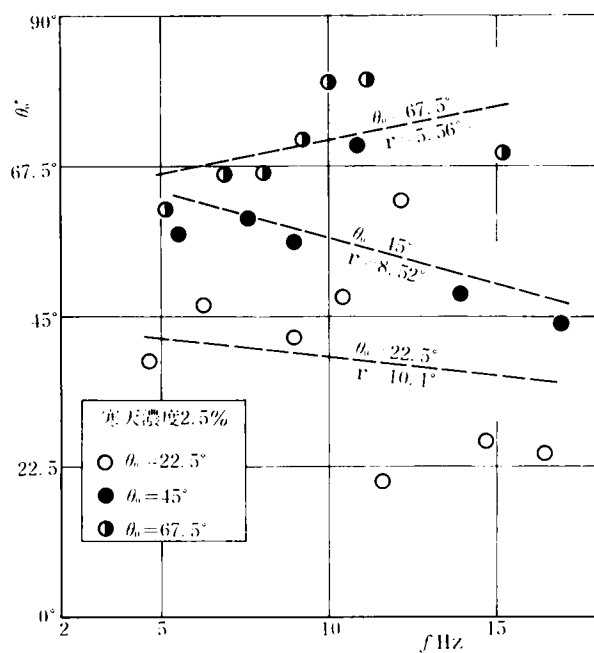
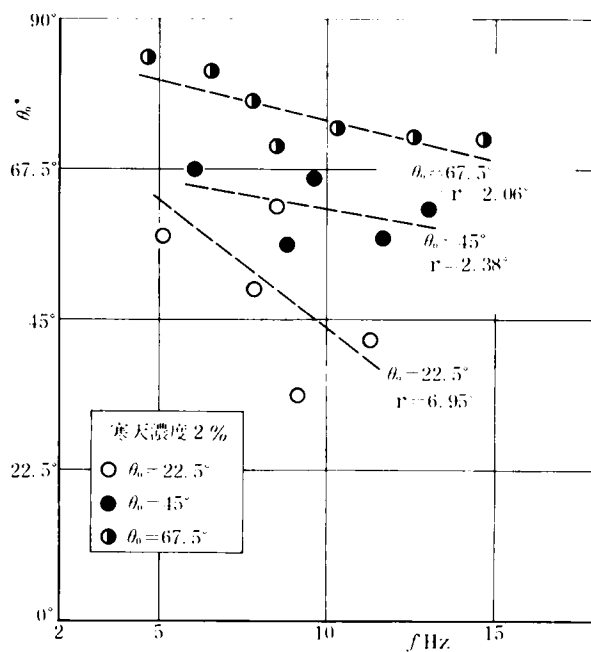


図 A・36 基礎底板の形状



(a) 楕円断面 ( $a/b = 1.5$ )



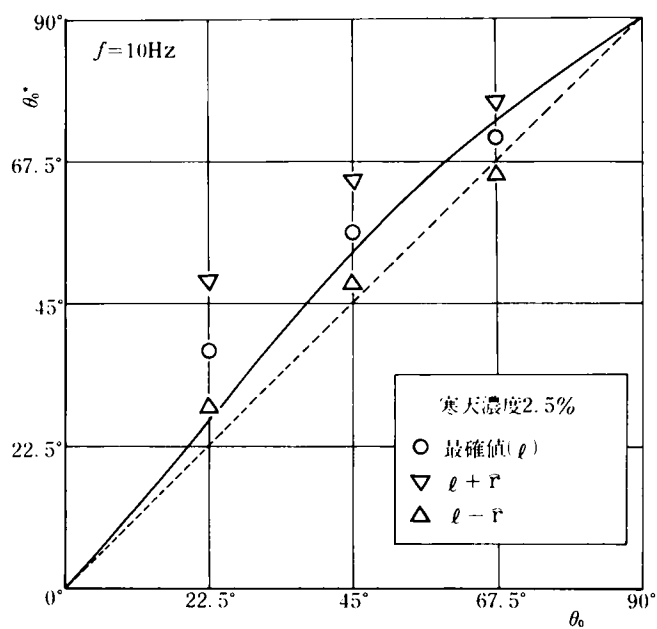
(b) 楕円断面 ( $a/b = 2$ )

図A・37 応答方向角の振動数特性

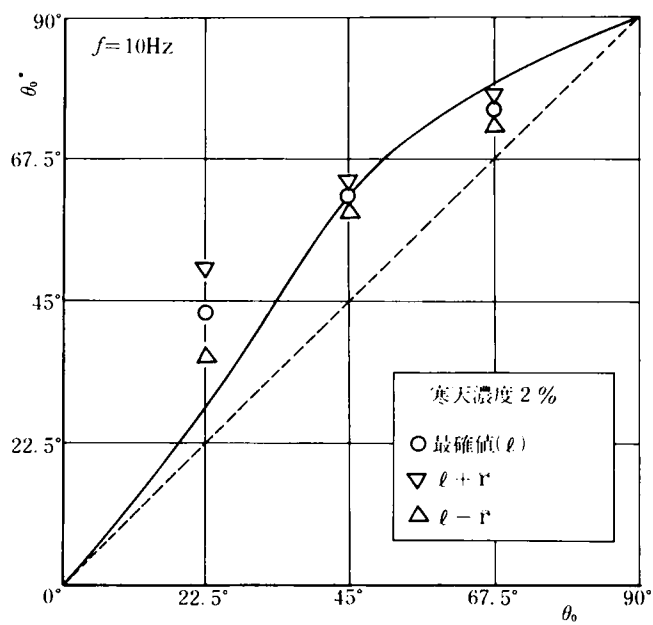
を検討してもそれほど意味を持つことにはならないばかりか、データ群の指向する傾向が把握にくい。そこで最も簡単にデータ群を整理するため、一定方向の入力に対する応答値ごとに、最小2乗法を用いて1次直線を当てはめてみたのが、図中の点直線であり、またこの点直線まわりのデータのばらつきを示す指標として推差（確率誤差） $\hat{r}$ をも合わせ図示した。もちろん、これらの実験値はあまりに個数が少ないので、統計的処理にそれほどの信頼性を期待するわけには行かないが、データの傾向はある程度示し得ているようである。図A・37 (a), (b) は互に模型地盤の濃度および断面の長短径比  $a/b$  の値が異なる場合についての内容であるが、構造物底面反力の不釣合をもたらすのが主として断面2次モーメントであることからして、応答方向角  $\theta_0^*$  は寒天濃度よりむしろ断面の長短径比  $a/b$  の影響を大きく受けると考えてよいであろう。したがって両図 (a), (b) の傾向の違いは、主として長短径比  $a/b$  の違いによって生ずる結果であると考えられる。両図において、入力方向が長軸方向に近いときは、応答方向角  $\theta_0^*$  は振動数の増加とともに減少する傾向がある。

一方それが短軸方向に近づくと  $a/b = 1.5$  では逆に増大するが、 $a/b = 2$  ではいく分緩やかにはなるが依然減少の傾向は変らない。したがって理論上での振動数に対して  $\theta_0^*$  がほぼ一定である傾向とは若干異なるようである。さらにまた、最確値（点直線）まわりのデータのばらつき具合を示す推差  $\hat{r}$  は、入力方向が短軸方向に近づくほど小さくなることが分るが、このことは実験においても短軸方向に揺れ易く、それだけ安定した応答方向であることを示していると言えよう。

ところで、入力方向角  $\theta_0$  と応答方向角  $\theta_0^*$  について整理したのが図A・38の (a), (b) であって、理論曲線と比較するために、一定振動数  $f = 10 \text{ Hz}$  の場合を示している。図中には、先述の最小2乗法で得られる直線上の点（最確値）およびそれに推差  $\hat{r}$  を加減した値を示しているが、 $\theta_0$  が小さい時は  $a/b = 1.5$  および2の場合ともに、 $\hat{r}$  の値は大きくなり、それだけ測定値の精度が悪くなることを示している。その点では  $a/b = 2$  における  $\theta_0 > 45^\circ$  では  $\hat{r}$  が非常に小さくなり精度のよい測定であることになり、この傾向は図A・37の (a), (b) のそれと同様の理由により説明されよう。また図中で理論曲線である実直線と測定値との対応を見ると、一般に実験で測定される  $\theta_0^*$  の方が理論上のそれよりも若干大きくなるようであるが、 $\theta_0 > 45^\circ$  すなわち入力方向がより短軸方向に接近してくると、両者の傾向はほぼ対応しているのに比して、 $\theta_0 = 22.5^\circ$  においては、実験値の方が相当大きいようである。このことは、推差  $\hat{r}$  の大きさからしても、その応答方向と運動が不安定であることによるものと推察されるが、これは外力の入射が断面の曲率の大なる方向に近いときは、地盤の支持力がその点に集中するために、動的な安定状態が長く保たれないことによるのであろう。さて小型起振器により励起さ



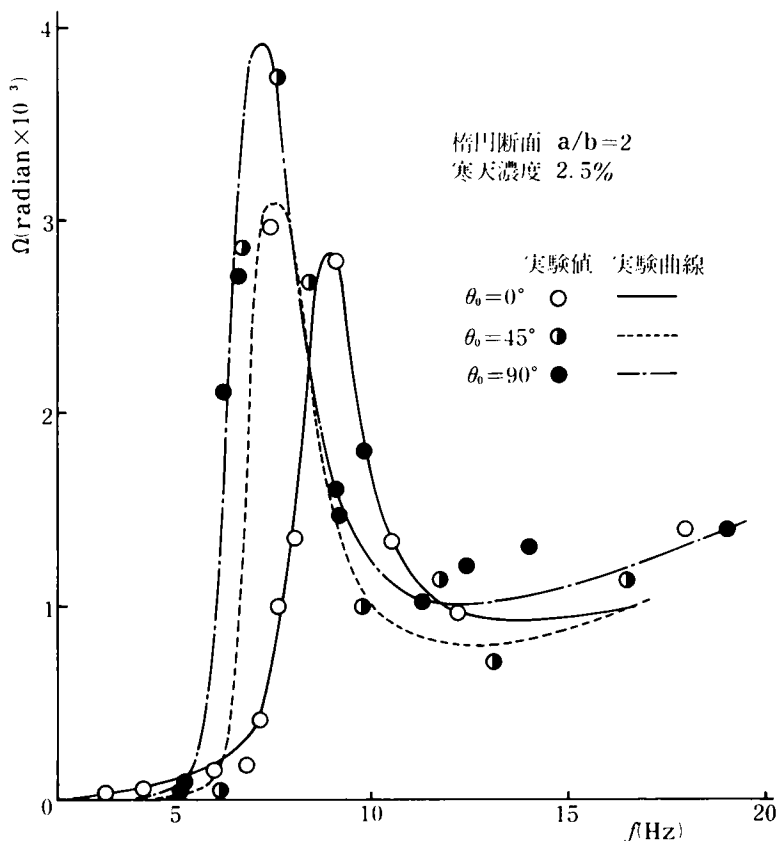
(a) 楕円断面 ( $a/b = 1.5$ )



(b) 楕円断面 ( $a/b = 2$ )

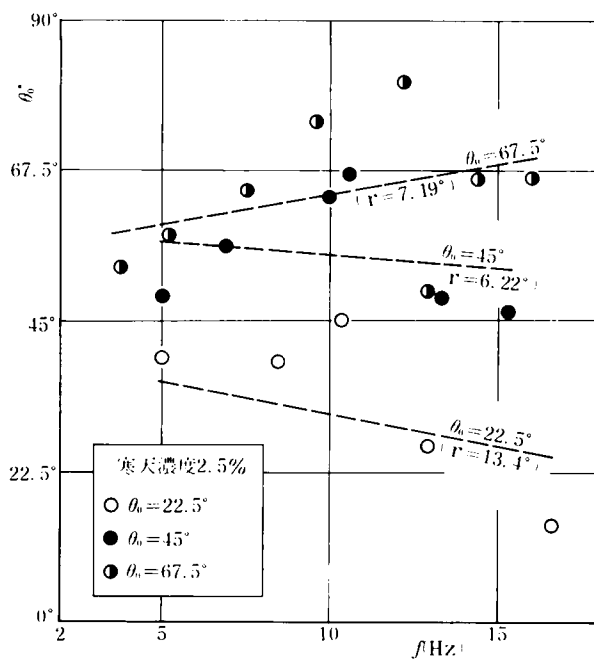
図 A・38 入力方向角と応答方向角との関係

れた模型構造物は、入力方向により、また振動数により異なった応答をすることを示したのが、図A・39の周波数応答曲線である。この図の連続曲線は実験測定値を滑らかに結んだ実験曲線であって、図A・26の理論周波数応答曲線と対応するわけである。実験においても、入力方向が長軸方向に近いときは共振点の位置が高振動数域に移行し、その振幅を減じる傾向は、きわめてよく類似していると言えよう。

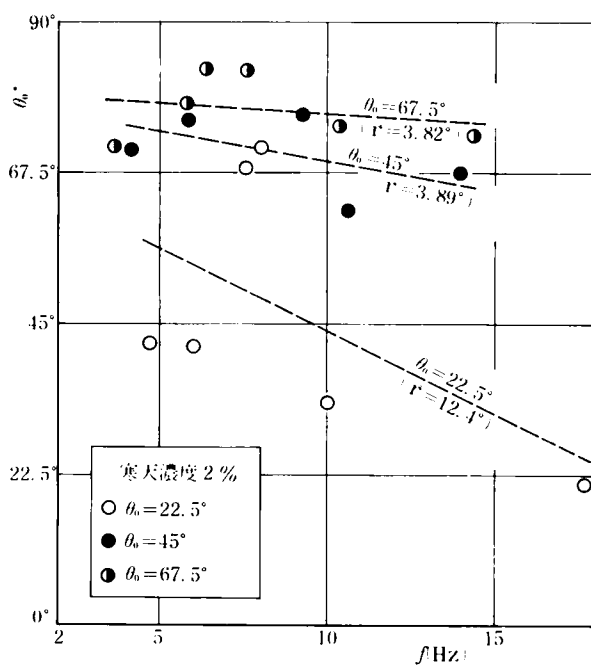


図A・39 回転角の実験共振曲線

次に、矩形断面構造物の応答方向角  $\theta_0^*$  の周波数依存性を示したのが、図A・40 (a) および (b) である。図の (a) および (b) はそれぞれ長軸・短軸の比  $a/b = 1.5$  および 2 の場合について示したものであるが、楕円断面の場合と同様に応答方向角  $\theta_0^*$  は、入力方向が長軸に近いときは振動数の増加とともに減少する傾向があり、入力方向  $\theta_0$  が短軸に接近すると、振動数に対して  $a/b = 1.5$  では増大気味であり  $a/b = 2$  のようにやや偏平な断面ではその減少の割合は小さくなる。また最確値を示す直線のまわりのデータ分散度を示す推差  $\hat{r}$  は、偏平な断面ほど小さくなり、応答方向角は安定してくることを示している。図A・41 (a), (b) は、同様に一定

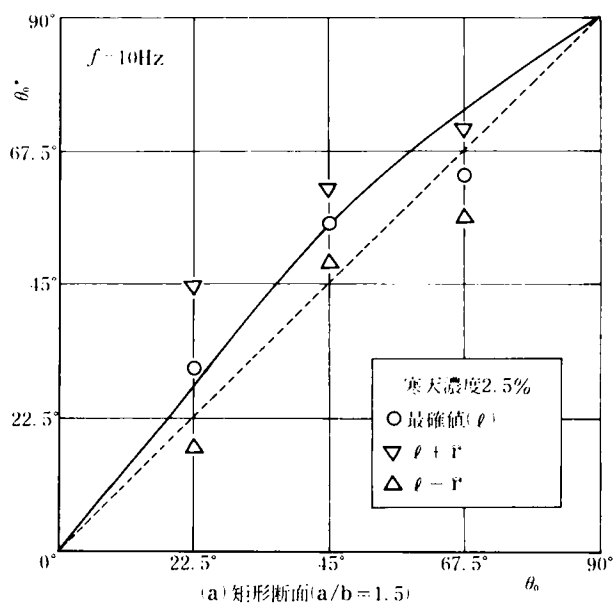


(a) 矩形断面 ( $a/b = 1.5$ )

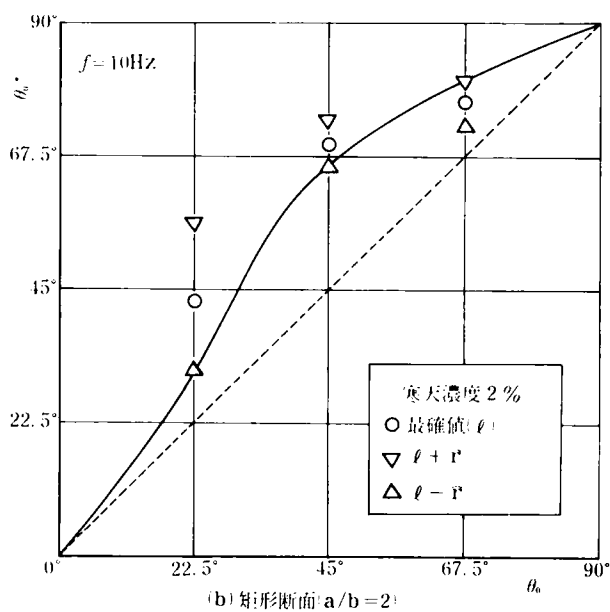


(b) 矩形断面 ( $a/b = 2$ )

図 A・40 応答方向角の入力振動数特性



(a) 矩形断面 ( $a/b = 1.5$ )

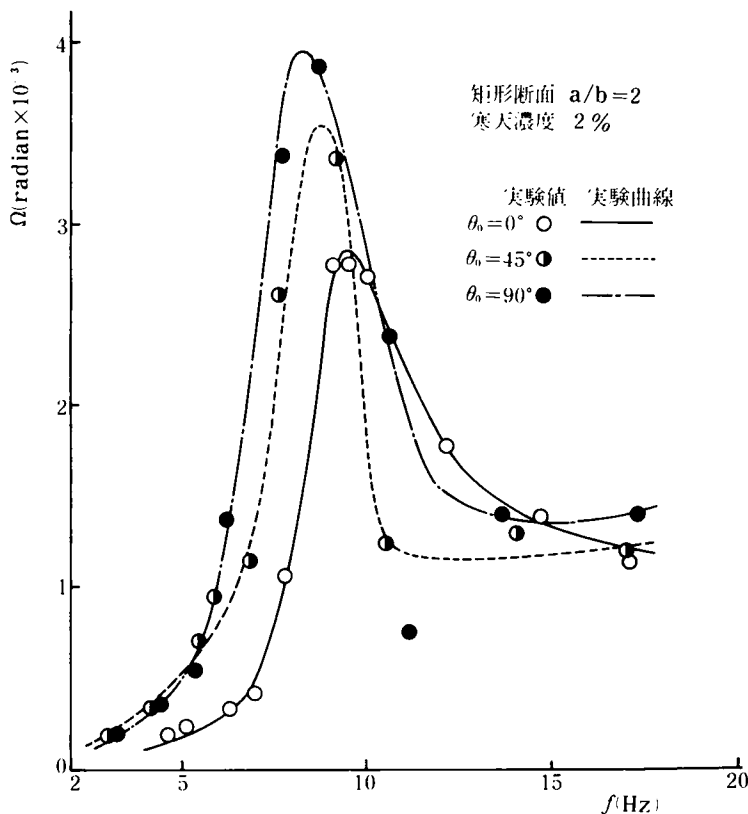


(b) 矩形断面 ( $a/b = 2$ )

図 A・41 入力方向角と応答方向角との関係



振動数  $f = 10 \text{ Hz}$  における、応答方向角の最確値と推差とを図示し、理論曲線と対比したものである。(a)における  $a/b = 1.5$  の場合は、最確値  $\theta_0 = 67.5^\circ$  の場合以外では理論曲線とはほとんど一致していることが分る。 $\theta_0 = 67.5^\circ$  において  $\theta_0^* < \theta_0$  となるのは、理論的には解しにくい現象であるが、楕円断面の場合と異なり矩形断面の隅角部においては、地盤に大きな応力集中が起るために、振動中に何らかの不安定現象に至ったものとも推定される。(b)の  $a/b = 2$  の矩形断面においては、入力方向が  $\theta_0 > 45^\circ$  の領域では推差  $\hat{r}$  は相当小さくなり、応答方向角  $\theta_0^*$  の安定した動揺振動が生じていると言えよう。ところが  $\theta_0 = 22.5^\circ$  の方向に入射するときは  $\hat{r}$  はかなり大きくなり、振動は不安定となって測定値はばらつきが激しくなるが、やはり、外力の入射方向が矩形断面の隅角部に向っているときは、どうしても隅角部直下の地盤が構造物を大きく支えることになるので、不安定な現象が生じやすいものと解されよう。図A・42は任意方向に加振されたときの矩形断面構造物の回転角  $\Omega_\phi$  の周波数応答曲線であるが、やはり外力の入射方向が長軸方向に近いときは共振点は高振動数側へ移動し、共振振幅は減少するようであり、理論共振曲線の図A・27の傾向とよく対応している。



図A・42 回転角の実験共振曲線

さて図A・43は正方形断面の場合の、応答方向角  $\theta_0^*$  の加振振動数による影響を示している。入射角が  $\theta_0 = 22.5^\circ$  では、 $\theta_0^*$  は振動数にほとんど依存しなく、入射角  $\theta_0$  よりやや大きい一定値を示すようである。これは、図A・18の理論傾向とよく対応しており、最確値の推差  $\hat{r}$  もそれほど大きくはなく、比較的安定していると言えようが、入力方向が  $\theta_0 = 45^\circ$  のときは、原理的には  $\theta_0^* = \theta_0$  であるにもかかわらず、応答方向角  $\theta_0^*$  は振動数の増大とともに、増加する傾向を示している。この場合も同様に、外力の入射方向に断面の隅角部が存在するために、不安定振動現象が生じて、推差  $\hat{r}$  を大ならしめているものと推察される。この傾向は  $f = 10$  Hzにおける図A・44の  $\theta_0^*$  においてもよく示されているが、外力の入射が  $\theta_0 = 22.5^\circ$  では理論より大きくなるようである。また回転角  $\phi$  の周波数応答曲線を示す図A・45においては、入射方向のいかんにかかわらずいずれの場合の共振点も一致しており、正方形断面の場合は外力の入射方向に関係なく、接触面のアドミッタンスが同じであることを示していることになる。

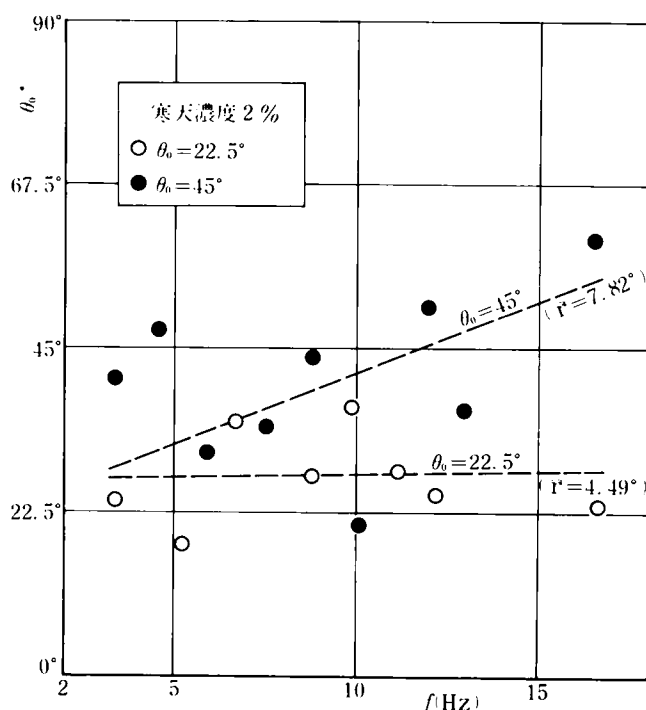


図 A・43 応答方向角の振動数特性

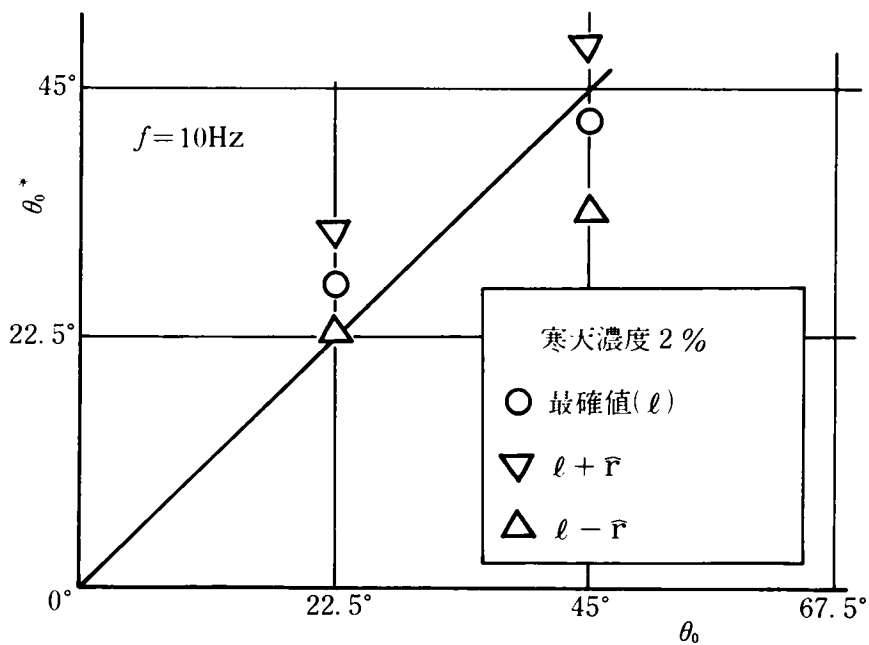


図 A・44 入力方向角と応答方向角との関係

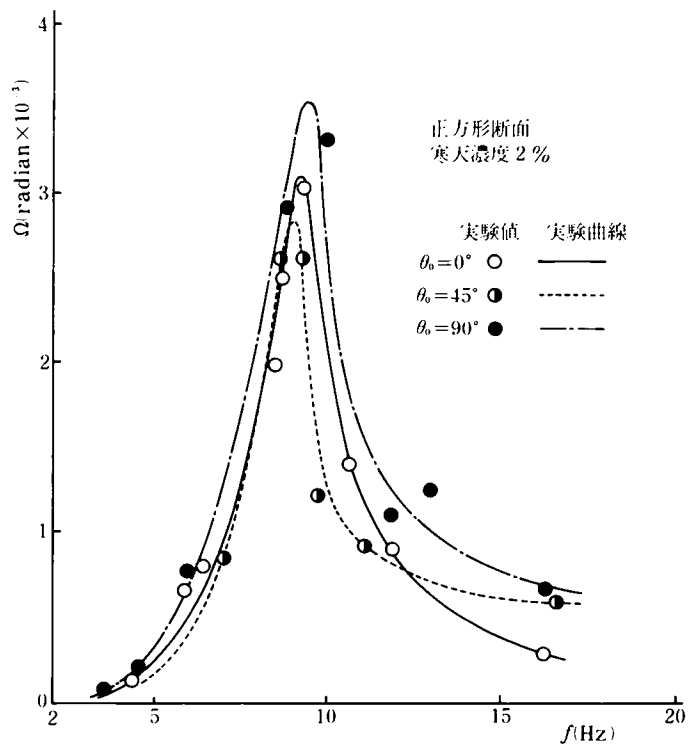


図 A・45 回転角の実験共振曲線

#### A.4 結 言

地表面上の構造物がその断面内の任意方向へ加振された場合、地盤と構造物の相互作用の結果より生ずる構造物の動的挙動を理論・実験で追求したが、これらによる成果を要約すると次のようになる。

- 1) 地表面にある構造物の底部接触面における動的鉛直変位は、水平変位を考慮しない半無限弾性体の Green 関数で近似しうる。
- 2) 地盤上における接触圧は、その回転振動数によって、Boussinesq 分布あるいは三角形分布に近似的な傾向を呈するが、回転振動中に外縁部の地盤支持力の降伏により、縁接触圧が断面の中間点接触圧よりも小さな値をとる分布を示すこともある。
- 3) 接触面から放射される波動の逸散によって減衰効果が生じ、構造物の理論応答回転角は有限値にとどまる。
- 4) 外力が構造物断面に一定の角度で入射するとき、その断面が偏平なほど短軸方向に揺れやすいことが、理論および実験の両面から確かめられた。
- 5) 模型地盤での実験によると、偏平な断面の場合は外力の入射の方向が短軸に近いほど応答方向角は安定した値を示すが、断面の曲率の大なる付近あるいは隅角部に近いときは、応答方向角は不安定になって、その測定精度はきわめて悪くなる。
- 6) 応答方向角は、理論上は外力の振動数にほとんど依存することなく一定であるが、模型地盤上での実験によるとほぼ振動数とともに減少する傾向にある。
- 7) 動揺振動の回転角の周波数応答曲線の傾向は、理論と実験とにおいて比較的よく対応しており、楕円・矩形断面においては外力が短軸方向に入射するときの共振点は低振動数域へ移行して応答は増大し、長軸方向に入射する場合の共振点は高振動数域へ移りその共振振幅は減少する。

このようにして、地表面上構造物の揺れやすい条件および回転角の方向について理論および実験により検討してきたが、初めにも述べたように理論展開上において多くの仮定が含まれており、また実験においては多くの改良すべき点が残されている。すなわち

- 1) 接触面での鉛直圧力の分布は、断面中心より同一の距離においては、その周辺方向における変化は正弦関数的でよいのかどうか。
- 2) 接触圧分布は、静的分布と異なり周波数の関数となり、周波数により種々の分布形をとる

のではないか。

3) 応答方向角を決定する方法は、最小2乗法の適用等についても検討すべきではないか。

4) 実験より応答方向角を決めるには、得られた記録紙上での測定波形の同時刻記録より読み取ったが、計測器の諸種の機構的特性により、波形相互の位相調整が困難であり、視読による誤差を避けにくい。

等の諸点について今後改良されるべきであろう。

ところでこのような半無限地表面上に加振点が存在する場合において、地盤を有限要素に分割して、Rayleigh 波および Love 波の伝播性を論じ、この分割モデルと半無限連続体理論による結果と対比し、その有用性を示した研究<sup>14),15),16)</sup>もある。このような有限要素分割な離散モデルを考える場合、地盤内を伝播する波の波長より小さく要素を分割せねばならないので、地震動のように複雑な波に対する対処法も今後の課題の一つになろう。

## 付 録

### B. Mathieu function に関する characteristic number $a_1, b_1$ および展 開 係 数 $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$ に つ い て

Mathieu function の argument  $q$  が複素数である場合は, 第 2 章の式 (2・24) のように, 分離定数  $\lambda'$  を介して変数分離された Mathieu の方程式は,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\xi^2} - (\lambda' + 2q \cosh 2\xi) R &= 0 \\ \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + (\lambda' + 2q \cos 2\eta) \Theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 1)$$

と書ける<sup>17)</sup>。この両式の解としては, 第 1 種および第 2 種の変形 Bessel function  $I_r(\cdot), K_r(\cdot)$  でもって展開された解として, 上記  $R(\xi, q), \Theta(\eta, q)$  は以下のような 4 つの場合が対応する。

$$R(\xi, q) = \left\{ \begin{aligned} \text{Fek}_{2n}(\xi, q) &= \frac{P'_{2n}}{\pi A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} I_r(v_1) K_r(v_2), \quad (a_{2n}) \\ \text{Fek}_{2n+1}(\xi, q) &= \frac{s'_{2n+1}}{\pi B_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} [I_r(v_1) K_{r+1}(v_2) - I_{r+1}(v_1) K_r(v_2)], \quad (a_{2n+1}) \\ \text{Gek}_{2n+1}(\xi, q) &= \frac{P'_{2n+1}}{\pi A_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} [I_r(v_1) K_{r+1}(v_2) - I_{r+1}(v_1) K_r(v_2)], \quad (b_{2n+1}) \\ \text{Gek}_{2n+1}(\xi, q) &= \frac{s'_{2n+2}}{\pi B_2^{(2n+2)}} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} [I_r(v_1) K_{r+2}(v_2) - I_{r+2}(v_1) K_r(v_2)], \quad (b_{2n+2}) \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 2)$$

$$\Theta(\eta, q) = \left\{ \begin{aligned} \text{ce}_{2n}(\eta, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos 2r\eta, \quad (a_{2n}) \\ \text{ce}_{2n+1}(\eta, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos (2r+1)\eta, \quad (a_{2n+1}) \\ \text{se}_{2n+1}(\eta, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin (2r+1)\eta, \quad (b_{2n+1}) \\ \text{se}_{2n+2}(\eta, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin (2r+2)\eta, \quad (b_{2n+2}) \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 3)$$

前者の  $R(\xi, q)$  が modified Mathieu function, 後者  $\Theta(\eta, q)$  が Mathieu function と呼ばれるもので、式 (B・2), 式 (B・3) の後方の ( ) 内の  $a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+1}, b_{2n+2}$  が先述の分離定数  $\lambda'$  のことであり、いわゆる characteristic number である。

$$\left. \begin{array}{l} \text{ただし} \quad v_1 = \sqrt{q} e^{-\xi} \\ \quad \quad v_2 = \sqrt{q} e^{\xi} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 4)$$

であって、かつまた式 (B・2) における係数  $p'_{2n}, s'_{2r+1}, p_{2n+1}, s_{2n+2}$  については、実際の応答計算上は modified Mathieu function を比の形で使用するのので、ここではその値を必要としない。

これらの解のうち、第2章の解析においては、地中構造物としては剛体柱を取扱っており、当然その楕円断面形は常に保持されているので、 $\eta$  が  $\pi/2$  ごとに、これらの関数値が0または極大(小)値を交互にとりうるものは、各関数の添字が奇数、すなわち  $(2n+1)$  となっているものが、妥当な解となることが分る。本解析例では  $n=0$  の場合のみを対象にすればよいので、characteristic number  $a_1, b_1$  を、Mathieu function は  $ce_1(\eta, q), se_1(\eta, q)$  について考えればよい。すなわち、 $ce_1(\eta, q)$  に対して

$$\left. \begin{array}{l} (a_1 - 1 - q) A_1^{(1)} - q A_3^{(1)} = 0 \\ [a_1 - (2r+1)^2] A_{2r+1}^{(1)} - q (A_{2r+3}^{(1)} + A_{2r-1}^{(1)}) = 0, \quad r \geq 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 5)$$

$se_1(\eta, q)$  に対して

$$\left. \begin{array}{l} (b_1 - 1 + q) B_1^{(1)} - q B_3^{(1)} = 0 \\ [b_1 - (2r+1)^2] B_{2r+1}^{(1)} - q (B_{2r+3}^{(1)} + B_{2r-1}^{(1)}) = 0, \quad r \geq 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 6)$$

そこで、

$$\left. \begin{array}{l} A_3^{(1)} / A_1^{(1)} = v_1, \quad A_5^{(1)} / A_3^{(1)} = v_3, \quad A_7^{(1)} / A_5^{(1)} = v_5, \dots\dots\dots \\ B_3^{(1)} / B_1^{(1)} = u_1, \quad B_5^{(1)} / B_3^{(1)} = u_3, \quad B_7^{(1)} / B_5^{(1)} = u_5, \dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 7)$$

とおくと、式 (B・5), (B・6) はおのおの次のように書き改められる。

$ce_1(\eta, q)$  に対して

$$v_1 = \frac{a_1 - 1 - q}{q},$$

$$v_{2r+1} = \frac{a_1 - (2r+1)^2}{q} - \frac{1}{v_{2r-1}}, \quad r \geq 1 \quad \left. \vphantom{\frac{a_1 - (2r+1)^2}{q}} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 8)$$

$\text{se}_1(\eta, q)$  に対して

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{b_1 - 1 + q}{q}, \\ u_{2r+1} &= \frac{b_1 - (2r+1)^2}{q} - \frac{1}{u_{2r-1}}, \quad r \geq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 9)$$

そこで式 (B・8) より

$$L = qv_1 - (a_1 - 1 - q) = 0 \quad \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 10)$$

とおくと、一定の argument  $q$  に対して、 $v_1$  は  $a_1$  の関数となるので、

$$L(a_1) = qv_1 - a_1 + 1 + q \quad \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 11)$$

は  $\delta a_1$  が十分小さければ、Taylor 展開により次式のように第 1 次近次までにとどめてもよからう。

$$L(a_1 + \delta a_1) \cong L(a_1) + \delta a_1 \frac{\partial L(a_1)}{\partial a_1} \quad \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 12)$$

すなわち、 $a_1$  が  $\delta a_1$  の変動でこの式の左辺  $L(a_1 + \delta a_1) \cong 0$  となったとすれば、いわゆる Newton の近似式

$$\delta a_1 = L(a_1) / \left[ -\frac{\partial L(a_1)}{\partial a_1} \right] \quad \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 13)$$

をうる。そこでこの式の分母を計算するために、式 (B・11) より

$$-\frac{\partial L(a_1)}{\partial a_1} = 1 - \frac{\partial(qv_1)}{\partial a_1} \quad \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 14)$$

ここで、式 (B・8) より



$$v_1 = \frac{q}{a_1 - 9 - qv_3} \quad \cdots \cdots \cdots (B \cdot 15)$$

を式 (B・14) に代入すると以下の関係式をうる。

$$\therefore -\frac{\partial(qv_1)}{\partial a_1} = \frac{q^2}{(a_1 - q - qv_3)^2} \frac{\partial}{\partial a_1} (a_1 - q - qv_3) = v_1^2 \left[ 1 - \frac{\partial(qv_3)}{\partial a_1} \right] \quad \cdots (B \cdot 16)$$

さらに、

$$v_3 = \frac{q}{a_1 - 25 - qv_5} \quad \cdots \cdots \cdots (B \cdot 17)$$

を式 (B・16) と同様にして、次式が成立する。

$$-\frac{\partial(qv_3)}{\partial a_1} = v_3^2 \left[ 1 - \frac{\partial(qv_5)}{\partial a_1} \right] \quad \cdots \cdots \cdots (B \cdot 18)$$

これを式 (B・16) に代入すると、さらに次の漸化関係式が得られる。

$$-\frac{\partial(qv_1)}{\partial a_1} = v_1^2 \left[ 1 + v_3^2 \left\{ 1 - \frac{\partial(qv_5)}{\partial a_1} \right\} \right] \quad \cdots \cdots \cdots (B \cdot 19)$$

一般には次の漸化式が成立することが容易に知られよう。

$$-\frac{\partial(qv_{2r+1})}{\partial a_1} = v_{2r-1}^2 \left[ 1 - \frac{\partial(qv_{2r+1})}{\partial a_1} \right], \quad r \geq 1 \quad \cdots \cdots \cdots (B \cdot 20)$$

これらの関係式を、式 (B・19) にくり返し適用すると、結局次式をうる。

$$-\frac{\partial(qv_1)}{\partial a_1} = v_1^2 \left[ 1 + v_3^2 + v_3^2 v_5^2 + v_3^2 v_5^2 v_7^2 + \cdots \cdots \right] \quad \cdots \cdots \cdots (B \cdot 21)$$

したがって、式 (B・14) より

$$-\frac{\partial L(a_1)}{\partial a_1} = 1 + v_1^2 + v_1^2 v_3^2 + v_1^2 v_3^2 v_5^2 + \cdots \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{(A_1^{(1)})^2} [ (A_3^{(1)})^2 + (A_5^{(1)})^2 + (A_7^{(1)})^2 + \dots ] \quad \dots (B \cdot 22)$$

それゆえ

$$-A_1^2 \frac{\partial L}{\partial a_1} = \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{ce}_1^2(\eta, q) d\eta \quad \dots (B \cdot 23)$$

が成立する。

同様にして、 $\text{se}_1(\eta, q)$  についても、上述と同様な関係式が成立する。

$$\therefore -B_1^2 \frac{\partial L}{\partial b_1} = \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{se}_1^2(\eta, q) d\eta \quad \dots (B \cdot 24)$$

このような関係があるので、 $a_1$  を求める手法としては、まず最初に  $a_1$  を仮定して  $L(a_1 + \delta a_1) \cong 0$  となれば、この  $a_1 + \delta a_1$  が求める characteristic number であるが、もし  $a_1 + \delta a_1$  が  $L(a_1 + \delta a_1)$  を十分小さくならしめなければ、この  $a_1 + \delta a_1$  を次の  $a_1$  の仮定値として計算をくり返す。またこのくり返し計算では  $a_1$  の初期値をうまく仮定しないと、収束に時間を要する。本解析ではこの c.n. (characteristic number の略) の初期値  $a_1^{(0)}$  として、次のような式を argument  $q$  の如何によって使いわけている。

$$a_1^{(0)} = \begin{cases} -2p^2 + 6p - 1.25 - \frac{0.281}{p} - \frac{0.176}{p^2} - \frac{0.155}{p^3} - \frac{0.167}{p^4}, & (q \geq 9) \\ -0.145(q+1)(q-7.3), & (-2 \leq q < 9) \\ -2p^2 + 2p - 0.25 - \frac{0.03125}{p} - \frac{0.0117}{p^2} - \frac{0.00647}{p^3} - \frac{0.00453}{p^4}, & (q < -2) \end{cases} \quad \dots (B \cdot 25)$$

$$b_1^{(0)} = \begin{cases} -2p^2 + 2p - 0.25 - \frac{0.03125}{p} - \frac{0.0117}{p^2} - \frac{0.00647}{p^3} - \frac{0.00453}{p^4}, & (q \geq 2) \\ -0.145(q-1)(q+7.3), & (-9 \leq q < 2) \\ -2p^2 + 6p - 1.25 - \frac{0.281}{p} - \frac{0.176}{p^2} - \frac{0.155}{p^3} - \frac{0.167}{p^4}, & (q < -9) \end{cases} \quad \dots (B \cdot 26)$$

ただし、 $p=\sqrt{q}$  である。

かくして c.n.  $a_1$  および  $b_1$  が得られるが、解析上は地盤に内部減衰（粘性減衰）の存在を仮定しているの、一般には argument  $q$  が複素数となり、当然  $a_1$  および  $b_1$  も複素数として求まる。この c.n.  $a_1$  および  $b_1$  に対して、式 (B・8), (B・9) より展開係数比  $v_1, v_3, v_5, \dots$ ;  $u_1, u_3, u_5, \dots$  が定まるが、これより式 (B・7) を用いて各展開係数  $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$  を求めるに当って、 $A_1^{(1)}$  あるいは  $B_1^{(1)}$  なる量が不定である。そこで、式 (B・23) および式 (B・24) の右辺を 1 とおいて、Mathieu function を正規化しておくと、 $A_1^{(1)}, B_1^{(1)}$  は定められることになる。当然のことながらこれらの展開係数  $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$  も一般には複素数として求められる。

そこで、第 2 章の長軸方向の振動の場合の、c.n.  $a_1$  および  $b_1$ 、展開係数  $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$  の計算例を掲げたのが表 B・1 であり、各計算値は複素数であるから、( ) 内の前半が実数部を、後半が虚数部を示すものとする。この計算例は無次元振動数が  $\omega/\omega_g = 1$  の場合におけるものであって、argument  $q_1, q_2$  がおのおの  $R, S$  に、characteristic number  $a_1, b_1$  がおのおの  $A_1, B_1$ 、および展開係数  $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$  がおのおの  $A, B$  に対応している。当然のことながら、 $\omega/\omega_g$  が一定であっても、応答は表層の固有モードで展開しているので、argument  $q_1(R), q_2(S)$  にもそのモードのもつ固有振動数の影響を受けるため、その最小の 4 モードに対するものを上から順に示してある。これより、展開係数  $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$  は次数  $r$  の増加とともに急速にその値を減少させるが、地盤のモード次数  $m$  が増加するほどすなわち第 2 章での  $\xi_m$ 、したがって argument  $q_1, q_2$  の実部が増大するほど、 $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$  の次数  $r$  に対する低下の度合いが緩やかになってくることが分る。いずれにしても、Mathieu function を Bessel function で展開するときは、最初の 5 項くらいを採用すれば十分であると言えよう。

付表 B・1  $a_1, b_1$  および  $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$  の数値計算例

$A/B = 2.00$      $H/A = 2.00$      $VL/VT = 3.00$      $TETA = 0.0$      $HC = 0.050$      $FREQ = 1.00$

$R$	$S$
( 3.382E-11, 1.285E-03 )	( 3.044E-10, 1.157E-02 )
$A_1$	$B_1$
( 1.000E 00, 1.285E-03 )	( 1.000E 00, -1.157E-02 )
$A$	$B$
( 1.000E 00, 3.870E-12 )	( 1.000E 00, -2.822E-09 )
( 2.392E-08, -1.618E-04 )	( -1.938E-06, -1.456E-03 )
( -8.686E-09, -1.709E-12 )	( -7.036E-07, 1.247E-09 )
( -5.152E-17, 2.328E-13 )	( 3.381E-13, 1.697E-10 )
( 3.743E-18, 8.831E-22 )	( 2.456E-14, -5.217E-17 )
( 9.853E-27, -4.010E-23 )	( -5.239E-21, -2.368E-18 )
( -3.069E-28, -7.753E-32 )	( -1.631E-22, 3.711E-25 )

$R$	$S$
( 1.028E-01, 1.157E-02 )	( 9.253E-01, 1.041E-01 )
$A_1$	$B_1$
( 1.101E 00, 1.126E-02 )	( -1.959E-02, -1.243E-01 )
$A$	$B$
( 9.999E-01, -1.952E-05 )	( 9.946E-01, -1.068E-03 )
( -1.310E-02, -1.490E-03 )	( -1.038E-01, -1.020E-02 )
( 5.573E-05, 1.280E-05 )	( 3.821E-03, 7.952E-04 )
( -1.166E-07, -4.100E-08 )	( -7.067E-05, -2.301E-05 )
( 1.442E-10, 6.970E-11 )	( 7.791E-07, 3.529E-07 )
( -1.170E-13, -7.371E-14 )	( -5.662E-09, -3.366E-09 )
( 6.657E-17, 7.322E-17 )	( 2.896E-11, 2.191E-11 )

$R$	$S$
( 3.084E-01, 3.213E-02 )	( 2.776E 00, 2.891E-01 )
$A_1$	$B_1$
( 1.296E 00, 2.951E-02 )	( -2.461E 00, -4.109E-01 )
$A$	$B$
( 9.992E-01, -1.738E-04 )	( 9.704E-01, -4.195E-03 )
( -4.017E-02, -4.322E-03 )	( -2.409E-01, -1.650E-02 )
( 5.174E-04, 1.114E-04 )	( 2.434E-02, 3.891E-03 )
( -3.272E-06, -1.071E-06 )	( -1.295E-03, -3.374E-04 )
( 1.223E-08, 5.471E-09 )	( 4.199E-05, 1.552E-05 )
( -3.005E-11, -1.739E-11 )	( -9.093E-07, -4.444E-07 )
( 5.194E-14, 3.775E-14 )	( 1.399E-08, 8.695E-09 )

$R$	$S$
( 6.169E-01, 6.297E-02 )	( 5.552E 00, 5.667E-01 )
$A_1$	$B_1$
( 1.566E 00, 5.212E-02 )	( -6.648E 00, -8.935E-01 )
$A$	$B$
( 9.966E-01, -7.452E-04 )	( 9.332E-01, -6.705E-03 )
( -8.284E-02, -8.954E-03 )	( -3.543E-01, -1.625E-02 )
( 2.156E-03, 4.629E-04 )	( 6.315E-02, 7.761E-03 )
( -2.742E-05, -8.910E-06 )	( -6.280E-03, -1.333E-03 )
( 2.058E-07, 9.106E-08 )	( 3.914E-04, 1.216E-04 )
( -1.015E-09, -5.792E-10 )	( -1.655E-05, -6.924E-06 )
( 3.521E-12, 2.517E-12 )	( 5.025E-07, 2.700E-07 )

## 参 考 文 献

- 1) H. Lamb : On the Propagation of Tremors on the Surface of an Elastic Solid, Philosophical Transactions, Vol. 203, 1904, pp. 1~42.
- 2) E. Reissner : Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Mass erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraums, Ingenieur-Archiv, Vol. VII, 1938, pp. 38~396.
- 3) 鳥海 勲 : Vibration in Foundation of Machine, Technical Report of Osaka University, Vol. 5, No. 146, 1955, pp. 103~126.
- 4) R. N. Arnold, G. N. Bycroft and G. B. Warburton : Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid, Jour. of App. Mech., Vol. 22, Sept. 1955, pp. 391~400.
- 5) 田治見宏 : 耐震理論に関する基礎的研究, 東京大学生産技術研究所報告, 第 8 卷, 第 9 号, 1959, pp. 170~215.
- 6) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有 : 弾性層上の長方形基礎の Ground Compliance, 日本地震工学シンポジウム (1966) 講演集, 1966. 10, pp. 255~260.
- 7) 井口道雄 : Input Earthquake Motion to Structure and Response Analysis with consideration of the Size, 第 3 回日本地震工学シンポジウム (1970) 講演集, 1970. 11, pp. 231~238.
- 8) 野邑雄吉 : 技術者のための特殊関数とその応用, 日刊工業新聞社, 1962, pp. 305~373.
- 9) 前出 5)
- 10) 前出 6)
- 11) 前出 5)
- 12) 前出 5)
- 13) Watson, G. N. : A Treatise on the Theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1966, pp. 328~338.
- 14) J. Lysmer : Lumped Mass Method for Rayleigh Waves, Bull. of Seism. Soc. of Am., Vol. 60, No. 1, Feb. 1970, pp. 89~104.
- 15) J. Lysmer and R. L. Kuhlemeyer : Finite Dynamic Model for Infinite Media, Jour. of ASCE, Vol. 95, EM4, Aug. 1969, pp. 859~877.

- 16) J. Lysmer and G. Waas : Shear Waves in Plane Infinite Structures, Jour. of ASCE, Vol. 98, EM1, Feb. 1972, pp. 85~105.
- 17) N. W. McLachlan : Theory and Application of Mathieu Functions, Dover, 1964.